

I Euler-Lagrangeの方程式

§ 1 Newtonの運動方程式における変数変換 (問題に応じて扱いやすい変数を選ぶ。)

デカルト座標でのNewtonの運動方程式は次のような2階の微分方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad \text{ただし } \mathbf{x} = (x, y, z)$$

初期条件としてある時刻 t_0 における質点の位置 $(\mathbf{x}(t_0))$ と速度 $(\dot{\mathbf{x}}(t_0))$ を与えると $\mathbf{x}$ が決まる。

$\mathbf{F}$ がポテンシャル $V(\mathbf{x})$ から導かれる場合を考える。

(ex. 太陽の周りの惑星の運動など)

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{x}) \quad \text{注意} \quad \left\{ \nabla (\text{ナブラ}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right\}$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla V(\mathbf{x}) \quad \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} V(\mathbf{x}) \\ m\ddot{y} = -\frac{\partial}{\partial y} V(\mathbf{x}) \\ m\ddot{z} = -\frac{\partial}{\partial z} V(\mathbf{x}) \end{array} \right.$$

例1 . 互いにポテンシャル $V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ で相互作用する2粒子の運動

各々の質点の座標から、重心座標、相対座標への変換を考える。

Newtonの運動方程式は

$$\begin{array}{l} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = -\nabla_1 V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = -\nabla_2 V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ \text{ただし、} \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

重心座標、相対座標への変数変換は

$$\mathbf{X} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2} \quad (m_1 + m_2 = M \text{ とする})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

この変換のため、 $\ddot{\mathbf{x}}_1, \ddot{\mathbf{x}}_2, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}$ を計算しておく。

$$\mathbf{x}_1 = \frac{M\mathbf{X} + m_2\mathbf{x}}{M}, \mathbf{x}_2 = \frac{M\mathbf{X} - m_1\mathbf{x}}{M} \quad \text{だから}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{M\ddot{\mathbf{X}} + m_2\ddot{\mathbf{x}}}{M}, \ddot{\mathbf{x}}_2 = \frac{M\ddot{\mathbf{X}} - m_1\ddot{\mathbf{x}}}{M}$$

-----ヒント-----

ある関数 F が X, x を通して x_1 の関数になっているとき、つまり $F(X(x_1), x(x_1))$ という合成関数になっているとき、合成関数の微分は

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1}$$

よって微分演算子の関係は

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial X}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x}$$

などとなることに注意。

また、微分演算子は

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{m_1}{M} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{m_2}{M} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{m_1}{M} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y_2} = \frac{m_2}{M} \frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{m_1}{M} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{m_2}{M} \frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial z}$$

これらを元の方程式に代入して、(x成分だけ見る。他は同様。)

$$m_1 \frac{M\ddot{X} + m_2\ddot{x}}{M} = -\left(\frac{m_1}{M} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x}\right) V(\mathbf{x})$$

$$m_2 \frac{M\ddot{X} - m_1\ddot{x}}{M} = -\left(\frac{m_2}{M} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x}\right) V(\mathbf{x})$$

$$\therefore m_1 \ddot{X} + \frac{m_1 m_2}{M} \ddot{X} = -\frac{\partial}{\partial x} V(\mathbf{x})$$

$$m_2 \ddot{X} - \frac{m_1 m_2}{M} \ddot{X} = \frac{\partial}{\partial x} V(\mathbf{x})$$

両辺加えて

$$M \ddot{X} = 0$$

上式に m_2 かけて下式に m_1 かけて辺々引くと

$$\mu \ddot{X} = -\frac{\partial}{\partial x} V(\mathbf{x})$$

y成分、z成分も同様。

ここで、 μ は換算質量で $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ 、また M は重心質量

重心運動と相対運動に分離することができた。重心運動は保存することが分かる。

例2．直交直線座標（デカルト座標）から球面極座標への変数変換。

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ を計算しておく。

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \ddot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \ddot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \ddot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi - r \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \varphi \\ & + 2\dot{r} \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi - 2r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} = & \ddot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \ddot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r \ddot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - r \dot{\theta}^2 \sin \theta \sin \varphi - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \sin \varphi \\ & + 2\dot{r} \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi + 2r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\ddot{z} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - r \ddot{\theta} \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ を計算しておく。

-----ヒント-----

ある関数Fが r, θ, φ を通して x の関数になっているとき、つまり
 $F(r, \theta, \varphi) \dots r(x), \theta(x), \varphi(x)$ という合成関数になっているとき、合
 成関数の微分は

$$\frac{\partial}{\partial x} F = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

よって微分演算子の関係は $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ となること
 に注意。

r, θ, φ は x, y, z の関数、 $r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z)$ 。 従って

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\text{ところで} \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 & (1) \\ \tan \varphi = \frac{y}{x} & (2) \\ \tan^2 \theta = \frac{x^2 + y^2}{z^2} & (3) \end{cases}$$

$$(1) \text{を} x, y, z \text{で微分して} \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos \theta \end{cases}$$

$$(2) \text{を} x, y, z \text{で微分して} \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{\sec^2 \varphi} \frac{y}{x^2} = -\frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\sec^2 \varphi} \frac{1}{x} = \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$(3) \text{を} x, y, z \text{で微分して} \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{\tan \theta \sec^2 \theta} \frac{x}{z^2} = \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\tan \theta \sec^2 \theta} \frac{y}{z^2} = \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{1}{\tan \theta \sec^2 \theta} \frac{x^2 + y^2}{z^3} = -\frac{1}{r} \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{以上より、} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$\therefore m\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} V(\mathbf{x})$$



$$m\ddot{x} = -\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (4)$$

$$\therefore m\ddot{y} = -\frac{\partial}{\partial y} V(\mathbf{x})$$



$$m\ddot{y} = -\sin \theta \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (5)$$

$$\therefore m\ddot{z} = -\frac{\partial}{\partial z} V(\mathbf{x})$$



$$m\ddot{z} = -\cos \theta \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (6)$$

(4) $\times \sin \theta \cos \varphi$ + (5) $\times \sin \theta \sin \varphi$ + (6) $\times \cos \theta$ より

$m(\ddot{x} \sin \theta \cos \varphi + \ddot{y} \sin \theta \sin \varphi + \ddot{z} \cos \theta) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ $\ddot{x} = \dots, \ddot{y} = \dots, \ddot{z} = \dots$ を用いて整理すると

$$m\ddot{r} - mr(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) = -\frac{\partial V(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \quad \text{が求まる。}$$

同じく(4),(5),(6)から

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - mr^2\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = - \frac{\partial V(r,\theta,\phi)}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi} \sin^2 \theta) = - \frac{\partial V(r,\theta,\phi)}{\partial \phi}$$

が求まる。

§ 2 運動方程式の変形

異なる座標変換ごとにこのような計算を行うのは非常に面倒。

例えば (x,y,z) 座標系から (r,θ,ϕ) 座標系へもっと簡単に移れないだろうか？

Newtonの運動方程式を違った形に書いておく。

質点の運動エネルギー $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2$

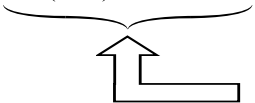
$L = T - V$ を定義する (Lagrangian)

$\mathbf{x}$ を独立変数のように考え、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} &= -\nabla V(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} &= m\dot{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = m\ddot{\mathbf{x}} + \nabla V(\mathbf{x})$$

(ただし $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}$ の意味は $\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \\ \frac{\partial L}{\partial z} \end{bmatrix}$ なるベクトルであるとする。)

即ち $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0$ は $m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla V(\mathbf{x})$ と同じ！

 Euler - Lagrangeの運動方程式
Newtonの方程式と同一 (粒子系のみならず、電磁系でも成立)

L は $\mathbf{x}$ と $\dot{\mathbf{x}}$ が含まれているが、それぞれ独立な変数と考えて微分していることに注意！

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \equiv \lim_{\mathbf{a} \rightarrow 0} \frac{L(\mathbf{x} + \mathbf{a}, \dot{\mathbf{x}}) - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\mathbf{a}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \equiv \lim_{\mathbf{a} \rightarrow 0} \frac{L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{a}) - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\mathbf{a}}$$

これらにより $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = m\ddot{\mathbf{x}} + \nabla V(\mathbf{x})$ の関係が得られ、

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0$ を要求すると、それを満たす $\mathbf{x}$ が Newton の方程式の解である。

(r, θ, ϕ) 系ではどうか？

この場合にも同じ形の Euler-Lagrange の方程式が成り立つ。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dots\dots \\ \dot{y} = \dots\dots \text{を用いると } L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - V(r, \theta, \phi) \\ \dot{z} = \dots\dots \end{cases}$$

(x, y, z) の一回微分さえ求めれば L は簡単に計算できる。)

従って、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 - m r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) - m r^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) + \frac{\partial V(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

これは前出の球面極座標の Newton の運動方程式に一致！

(x, y, z) 座標系から (r, θ, ϕ) 座標系へ変換が非常に簡単。

例 ポテンシャル中の 1 粒子

z 方向だけに依存するポテンシャル中を動く粒子
(例 . . 重力のポテンシャル)

$$\text{粒子の運動エネルギー} \quad T = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 - V(z)$$

Euler-Lagrange の方程式は

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot{z} + \frac{dV(z)}{dz} = 0 \end{cases}$$

$p_x = m\dot{x}$ 、 $p_y = m\dot{y}$ とすると $\dot{p}_x = 0$ 、 $\dot{p}_y = 0$ だから p_x, p_y は保存している。

Lagrangian は $\dot{x}, \dot{y}$ は含んでいるが、 x, y は含んでいない。

⇒ 保存則

Lagrangian が座標そのものを含まず、座標の時間微分のみを含むとき、その座標を循環座標 (cyclic coordinate or ignorable variable) と言う。

循環座標が一つ ⇒ 一つの保存量

原点からの距離 r のみの関数であるポテンシャルの場合。

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) - V(r)$$

$$\phi \text{ が循環座標} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0$$

z -軸の周りの角運動量が保存。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

他は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - mr^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = 0$$