

§ 3 基準振動と基準座標

上で見たように平衡点近傍でのLagrangianは2つの正値2次形式で表される。
今自由度を f として、

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} K_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} q_i q_j$$

$$K_{ij}、C_{ij} \text{は定数} \quad (K_{ij} = K_{ji}、C_{ij} = C_{ji})$$

と書く。

Lagrangeの運動方程式は、 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ に当てはめて、

$$\sum_j K_{ij} \ddot{q}_j + \sum_j C_{ij} q_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad \dots\dots\dots(1)$$

この方程式から基準振動の振動数と基準座標を求めよう。

基準振動が起きているときには全ての q_j が $q_j = A_j \cos(\omega t + \alpha)$ のように振動する。
これを(1)に代入すると、

$$\sum_j (-K_{ij} \omega^2 + C_{ij}) A_j \cos(\omega t + \alpha) = 0$$

つまり、
$$\sum_j (K_{ij} \omega^2 - C_{ij}) A_j = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

行列表現をすれば

$$\begin{pmatrix} K_{11}\omega^2 - C_{11} & K_{12}\omega^2 - C_{12} & \cdots & K_{1f}\omega^2 - C_{1f} \\ K_{21}\omega^2 - C_{21} & K_{22}\omega^2 - C_{22} & \cdots & K_{2f}\omega^2 - C_{2f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{f1}\omega^2 - C_{f1} & K_{f2}\omega^2 - C_{f2} & \cdots & K_{ff}\omega^2 - C_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_f \end{pmatrix} = 0 \quad \dots\dots(3)$$

自明でない解を与える永年方程式は

$$\begin{vmatrix} K_{11}\omega^2 - C_{11} & K_{12}\omega^2 - C_{12} & \cdots & K_{1f}\omega^2 - C_{1f} \\ K_{21}\omega^2 - C_{21} & K_{22}\omega^2 - C_{22} & \cdots & K_{2f}\omega^2 - C_{2f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{f1}\omega^2 - C_{f1} & K_{f2}\omega^2 - C_{f2} & \cdots & K_{ff}\omega^2 - C_{ff} \end{vmatrix} = 0$$

ω^2 に関する f 次の代数方程式から f 個の根、 $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_f^2$ が得られる。
 T も U も正値2次形式 $\rightarrow$ f 個の根は全て正。

2乗根の正の方を取り、 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_f$ とする。 ← 基準振動の角振動数（固有振動数）

次に、 $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_f^2$ それぞれにつき(2)を解いて $A_1, A_2, \dots, A_f$ を決める。決めることができるのは比だけ、絶対値は決まらない。

（解の A 全てを定数倍しても(2)は成り立つことが分かる。）

例えば、 $A_1 = 1$ として

$$\begin{array}{ll} \omega_1^2 \text{ に対して} & A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_f^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ \omega_i^2 \text{ に対して} & A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \dots, A_f^{(i)} \\ \vdots & \vdots \\ \omega_f^2 \text{ に対して} & A_1^{(f)}, A_2^{(f)}, \dots, A_f^{(f)} \end{array} \quad \text{とする。}$$

これらは(2)を満たす。つまり、 $\sum_j (K_{ij}\omega_k^2 - C_{ij})A_j^{(k)} = 0 \quad \dots\dots\dots(a)$

$$\begin{array}{l} \omega_l (\neq \omega_k) \text{ に対して} \quad \sum_j (K_{ij}\omega_l^2 - C_{ij})A_j^{(l)} = 0 \\ \downarrow \\ \sum_i (K_{ij}\omega_l^2 - C_{ij})A_i^{(l)} = 0 \quad \dots\dots\dots(b) \end{array}$$

（ただし(b)へは、 i, j を付け替え、 $K_{ij} = K_{ji}$ 、 $C_{ij} = C_{ji}$ を利用した。）

$\sum_j (b)A_j^{(k)}$ と $\sum_i (a)A_i^{(l)}$ を並べると

$$\begin{array}{l} \sum_{ij} (K_{ij}\omega_k^2 - C_{ij})A_i^{(l)}A_j^{(k)} = 0 \\ \sum_{ij} (K_{ij}\omega_l^2 - C_{ij})A_i^{(l)}A_j^{(k)} = 0 \end{array}$$

両辺引き算をして $(\omega_k^2 - \omega_l^2)\sum_{ij} K_{ij}A_i^{(l)}A_j^{(k)} = 0$

$\omega_k^2 \neq \omega_l^2$ だから

$$\sum_{ij} K_{ij}A_i^{(l)}A_j^{(k)} = 0$$

これは ω_k に対する解 $(A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \dots, A_f^{(k)})$ と
 ω_l に対する解 $(A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \dots, A_f^{(l)})$ の直交関係である。

普通のベクトルの直交関係の拡張になっている。 $(K_{ij} \neq \delta_{ij})$

$\sum_{ij} K_{ij}A_i^{(k)}A_j^{(k)} = 1$ により $(A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \dots, A_f^{(k)})$ のノルムを1に決め、絶対値を決める。

← 規格化（正規化） ただし全体の符号は決まらない。

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_f$ が全て異なるとして、互いに直交する f 個の解、
 $(A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \dots, A_f^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \dots, f)$ を用いると一般解、

$$\begin{aligned} q_1(t) &= A_1^{(1)} a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + A_1^{(f)} a_f \cos(\omega_f t + \alpha_f) \\ &\quad \vdots \\ q_f(t) &= A_f^{(1)} a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_f^{(2)} a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + A_f^{(f)} a_f \cos(\omega_f t + \alpha_f) \\ &\quad \dots (4) \end{aligned}$$

が得られる。 $a_1, \alpha_1; a_2, \alpha_2; \dots; a_f, \alpha_f$ は初期条件により決まる。
 a_k のみ有限で、他の a_i が全て 0 の場合、 k 番目の基準振動が起きている。 $A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \dots, A_f^{(k)}$ はそのとき $q_1, q_2, q_3, \dots, q_f$ の振幅比を与える。

次に基準座標を求める。

(4) の第 1 式に $\sum_j K_{1j} A_j^{(k)}$ 、. . . 第 f 式に $\sum_j K_{fj} A_j^{(k)}$ をかけて全体を加えると、

$$\begin{aligned} \sum_{ij} K_{ij} A_j^{(k)} q_i(t) &= \sum_{ij} K_{ij} A_i^{(1)} A_j^{(k)} a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \sum_{ij} K_{ij} A_i^{(2)} A_j^{(k)} a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \\ &\quad + \dots + \sum_{ij} K_{ij} A_i^{(f)} A_j^{(k)} a_f \cos(\omega_f t + \alpha_f) \end{aligned}$$

$$\text{直交関係より、} \sum_{ij} K_{ij} A_j^{(k)} q_i(t) = a_k \cos(\omega_k t + \alpha_k) \quad (k = 1, 2, \dots, f)$$

ただしベクトルは規格化しているとした。

$$Q_k(t) = \sum_i \left(\sum_j K_{ij} A_j^{(k)} \right) q_i(t) \quad \text{として基準座標 } Q_k(t) \text{ を定義する。}$$

(4) は $q_i(t) = \sum_k A_i^{(k)} a_k \cos(\omega_k t + \alpha_k)$ という式であるから

$a_k \cos(\omega_k t + \alpha_k) = Q_k(t)$ となり、

$$q_i(t) = \sum_k A_i^{(k)} Q_k(t) \quad \text{とかける。}$$

上の四角で囲った 2 式により $(q_1, q_2, \dots, q_f) \Leftrightarrow (Q_1, Q_2, \dots, Q_f)$ の変換が与えられた。
 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_f$ で表すと独立な単振動をする。

永年方程式が重根を持ち解が縮退している場合は、これらの解に付随する 1 次独立なベクトル A_1, A_2 を見いだせたとしても A_1, A_2 相互の直交性は保証されない。

(これらと他のベクトルは直交する。) しかし A_1, A_2 の 1 次結合を取り直し、互いに直交する 2 つのベクトルを作ることができる。

練習問題

図のように長さ l の伸びない糸と質量 m の二つの質点からなる2重振り子を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 揺れ角が小さいときのみを考え、束縛力の現れない座標を選んでLagranganを書け。

(運動エネルギーは $\sin \theta_i \simeq \theta_i$, $\cos \theta_i \simeq 1$ として、

ポテンシャルエネルギーは $1 - \cos \theta_i \simeq \frac{1}{2} \theta_i^2$

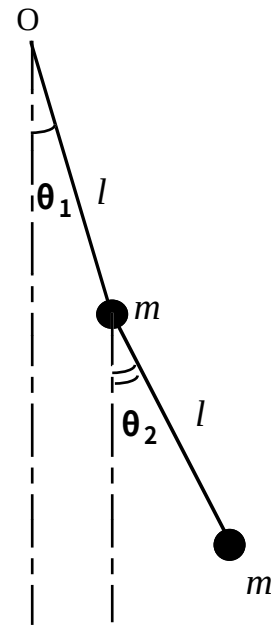
として求めよ。ただし $i = 1, 2$)

(2) 運動方程式を導け。

(3) $\theta_i = A_i \cos(\omega t + \alpha)$ の形を仮定して(2)で得た方程式に代入し A_i と固有角振動数を決める式を行列表現せよ。

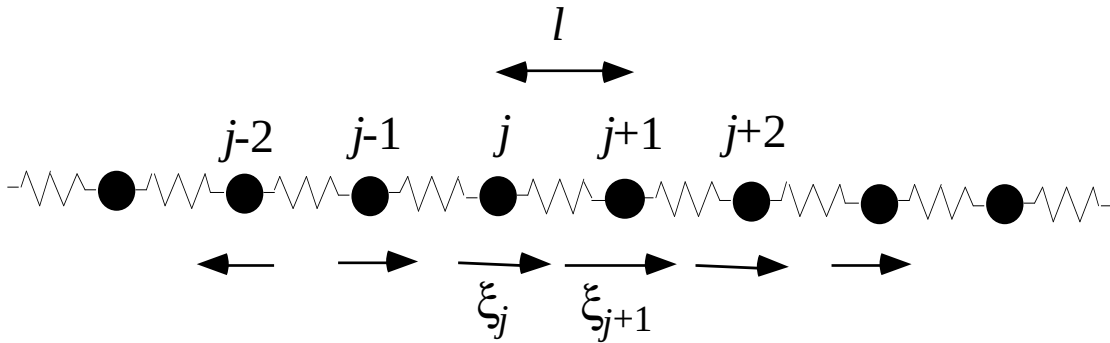
(4) 固有角振動数を求めよ。

(5) A_i の比を決めて基準座標を求め、その運動を記述せよ。



§ 4 格子振動

下のモデルで表したような格子振動を考える。



おもりの質量 m 、バネの弾性定数 k 、バネの長さ l とする。

運動エネルギーは $T = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{\xi}_j^2$

ポテンシャルエネルギーは $U = \sum_j \frac{1}{2} k (\xi_{j+1} - \xi_j)^2$

これらよりLagrangianは

$$L = \frac{1}{2} \sum_j \left\{ m \dot{\xi}_j^2 - k (\xi_{j+1} - \xi_j)^2 \right\}$$

運動方程式は

$$m \ddot{\xi}_j = -k(2\xi_j - \xi_{j+1} - \xi_{j-1}) \quad \dots\dots(1)$$

(この方程式は $\xi_{j+1}(t) + \xi_{j-1}(t) \propto \xi_j(t)$ となっていれば簡単に解ける。)

連成振動の基準振動が求められたとして、そのうち n 番目だけが励起されているとする。すなわち、

$$\xi_j(t) = A_j^{(n)} a_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) = A_j^{(n)} Q_n(t)$$

規格化の定数を C_n として $A_j^{(n)} = C_n \sin(j\eta_n)$ と取ってみる。

($A_{j+1}^{(n)} + A_{j-1}^{(n)} \propto A_j^{(n)}$ となっていればよい。)

$\xi_j(t) = \{C_n \sin(j\eta_n)\} Q_n(t)$ となり(1)に代入すると

$$\ddot{Q}_n = -\frac{2k}{m}(1 - \cos j\eta_n)Q_n \quad \text{となる。}$$

ω_n を $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}(1 - \cos \eta_n)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\eta_n}{2}$ と取ればよい。

($\sin(j+1)\eta + \sin(j-1)\eta = 2\cos\eta \sin j\eta$ の性質を利用。)

η_n はどう決めるか。

両端が固定されているとする。 $\xi_0=\xi_N=0$ $j=0$ で $\sin(j\eta_n)=0$ であるから、
 $N\eta_n = \pi$ の整数倍であればよい。

$$\eta_n = \frac{n\pi}{N} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$n \geq N$ は意味がないので $n=1, 2, \dots, N-1$

 $n=N+v$ とすると

$$\sin j\eta_{N+v} = \sin j\frac{N+v}{N}\pi = \sin\left(j\frac{v\pi}{N} + j\pi\right) = (-1)^j \sin j\eta_v \text{ となる。}$$

$\xi_0=\xi_N=0$ としたのでこの系は $\xi_1, \dots, \xi_{N-1}$ で記述されて自由度は $N-1$ 、従って基準振動も $Q_1, \dots, Q_{N-1}$ の $N-1$ 個になる。

結局 $A_j^{(n)} = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{N}j\right) \quad (n = 1, 2, \dots, N-1)$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sin\left(\frac{n\pi}{N}j\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{N}j\right) = \frac{N}{2} \delta_{nn'} \text{ であるから } C_n = \sqrt{\frac{2}{N}} \text{ とすれば規格直交化された解}$$

$$A_j^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{n\pi}{N}j\right) \quad (n = 1, 2, \dots, N-1)$$

が求められたことになる。 n 番目の基準振動だけが起きているときの各おもりの変位は

$$\parallel \xi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{n\pi}{N}j\right) Q_n(t)$$

(ただし、 $Q_n(t) = a_n \cos(\omega_n t + \alpha_n)$ で $\omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{n\pi}{2N}$)

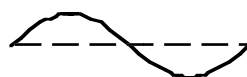
これは両端を節とする「定常波」の形になっている。

$\sin\left(\frac{n\pi}{N}j\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{Nl}jl\right)$ 、ただし jl は左端から測ったおもり j までの距離 (x_j とする)。

波長を λ_n として $\sin\left(\frac{n\pi}{Nl}x_j\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x_j\right)$ とおけるから $\lambda_n = 2Nl/n$



$$\lambda_n = 2Nl$$



$$\lambda_n = 2Nl/2$$



$$\lambda_n = 2Nl/3$$

右左の変位を上下の変位に置き換えた図。

§ 5 連続体の振動

波長が原子間隔よりずっと大きな波に対しては格子を連続体と見なすことができる。前節のモデルの原子間隔を無限小の極限に持つていくことで連続体近似ができる。（格子の振動が棒の縦振動になる。）

単位長さ当たりの質量（密度）を一定値（ $\rho=m/l$ ）に保ちながら m も l も小さくしていく。§ 4 の Lagrangian（式(1)）を次のように書き直す。

$$L = \frac{1}{2} \sum_j l \left\{ \frac{m}{l} \dot{\xi}_j^2 - kl \left(\frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{l} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots(1')$$

この式で m/l を ρ と書き換え、また鎖の方向に x 軸を取って

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{l} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

と書く。 j 番目のおもりの変位を $\xi_j(t) \rightarrow \xi(x, t)$ のように表す。ただしここでは x は離散的に指定された場所の指数 j のかわりに連続的に場所を指定するパラメーターで、一般化座標（変数）ではないことに注意！

kl の表現については以下の様に考える。

長さ L_0 の棒を x だけ伸ばすための力が F であるとする、フックの法則は

$$F = e \frac{x}{L_0}$$

と書ける。ただし e = ヤング率 $\times$ 断面積。棒の長さを ΔL だけ伸ばすための仕事は

$$\int_0^{\Delta L} F dx = \frac{e L_0}{2} \left(\frac{\Delta L}{L_0} \right)^2$$

であるから、棒の単位長さ当たりに蓄えられるエネルギーは $\frac{e}{2} \left(\frac{\Delta L}{L_0} \right)^2$ となる。これと鎖を繋ぐバネのポテンシャルエネルギーの表式を比較すれば $kl = e$ と対応していることが分かる。

これらより、Lagrangian (1') はさらに次のように書き直される。

$$L = \frac{1}{2} \sum_j l \left\{ \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_j^2 - e \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_j^2 \right\} \quad \dots\dots(2)$$

$l \rightarrow 0$ としたとき和は積分で書けて（ $l \rightarrow dx$ ）

$$L = \frac{1}{2} \int \left\{ \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - e \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right\} dx$$

という式になる。この積分の被積分関数

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \left\{ \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - e \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

は単位長さ当たりのLagrangianで、Lagrangian密度と呼ばれている。Lagrangeの運動方程式を(1')から作ると、

$$\frac{m}{l} \ddot{\xi}_j = kl \frac{1}{l} \left(\frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{l} - \frac{\xi_j - \xi_{j-1}}{l} \right)$$

となるが、 $\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \left(\frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{l} - \frac{\xi_j - \xi_{j-1}}{l} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ であるので、運動方程式の極限は

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = e \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \dots\dots(3)$$

と表されることになる。(3)は1次元の波動方程式。 $c = \sqrt{e/\rho}$ を速さとする波が解。正弦波の解では一般に

$$\xi(x, t) = A \sin \{k_1(x - ct) + \alpha\} + B \sin \{k_2(x + ct) + \beta\}$$

のように t の経過とともに $+c$ および $-c$ という速度で x 方向へ進行する波の重ね合わせとなる。 $B = A, k_1 = k_2 = k, ck = \omega$ の場合には

$$\xi(x, t) = 2A \sin \left(kx + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\omega t + \frac{\beta - \alpha}{2} \right)$$

という形の定常波となる。棒の両端($x=0, L_0$)で $\xi=0$ となるためには $\alpha + \beta = 0, kL_0 = n\pi (n=1, 2, 3, \dots)$ である。これを当てはめると

$$\xi_n(x, t) = 2A \sin \left(\frac{n\pi}{L_0} x \right) \cos (\omega_n t + \beta_n)$$

ただし、 $\omega_n = \frac{n\pi}{L_0} \sqrt{\frac{e}{\rho}}$ 。これらを鎖の場合の $\xi_j(t)$ と ω_n の表式と比較する。

$\omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{n\pi}{2N}$ を展開し $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{n\pi}{N}$ とすると、 $x=jl, L_0 = Nl$ として対応している。

この節での方法は、2, 3次元の場合にも拡張可能