

IV 変分原理

§ 1 準備

準備その1 . . . 極値問題の復習

$f(x, y)$ の極値（停留値）を求める。この関数の (x, y) での値と $(x+\delta x, y+\delta y)$ での値を比較。ただし、 $(\delta x, \delta y)$ は無限小。

$$\delta f = f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \delta y$$

$(x, y) = (x_0, y_0)$ が $f(x, y)$ の極値を与えたとしたらその点で $\delta f = 0$ 。逆に0でない $\delta x, \delta y$ に対して $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \delta y$ が0になるという条件から $f(x, y)$ が極値を取る点が求められる。

準備その2 . . . 汎関数

汎関数の例

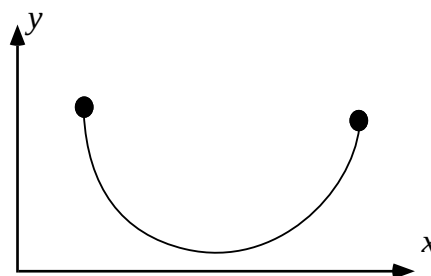
曲線 $y = f(x)$ があるときの $x = a$ から $x = b$ までの間の曲線の長さ。

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \equiv \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\therefore l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

曲線に沿って、線密度（単位長さ当たりの質量）が σ の鎖が存在するとき、 y を鉛直上向きとして a から b までの鎖が持つ位置エネルギー。

$$U = \int_a^b \sigma g y ds = \sigma g \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$



l も U も関数 $y = f(x)$ の関数になっている。

$I = \int_a^b F(x, y, y') dx$ なる量を見ると、この量は $y = f(x)$ の関数型によって値が変わる。 I は関数 $y = f(x)$ の汎関数 $I[y]$ である。

準備その3 . . . 汎関数の停留値

$I[y]$ の値が極値を取る $f_m(x)$ が見つかったなら $f_m(x)$ からほんの少しずれた関数 $f(x) = f_m(x) + \delta f(x)$ による $I[f(x)]$ と $I[f_m(x)]$ の差は0

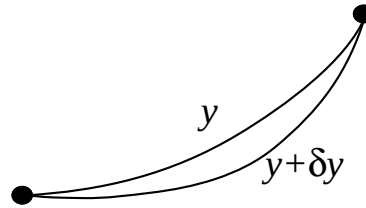
$$\delta I = I[f_m(x)] - I[f(x)] = 0 \quad \delta I \text{は} I \text{の変分。}$$

この $f_m(x)$ を探す方法を変分法という。

例 . . . xy 平面内の2定点 A, B を結ぶ最小の長さの曲線は？

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\delta l = \int_a^b \sqrt{1 + (y' + \delta y')^2} dx - \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$



$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (y' + \delta y')^2} &= \sqrt{1 + y'^2 + 2y'\delta y'} = \sqrt{1 + y'^2} \sqrt{1 + \frac{2y'}{1 + y'^2} \delta y'} \\ &= \sqrt{1 + y'^2} \left(1 + \frac{y'}{1 + y'^2} \delta y' \right) \end{aligned}$$

(ただし、無限小の2乗の量は計算の途中で無視している。)

$$\text{従って、} \delta l = \int_a^b \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \delta y' dx$$

ところで $\delta y'$ はなんだろう？

$$\delta y' = f'(x) - f_m'(x) = \frac{d}{dx} \delta y$$

$$\begin{aligned} \therefore \delta l &= \int_a^b \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \frac{d}{dx} \delta y dx \quad \text{部分積分して} \\ &= \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \delta y \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \delta y dx \end{aligned}$$

この式で[]内は0。なぜなら両端 a, b では $\delta y = 0$ だから。
任意の無限小 δy に対して δl が0になるためには

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \quad \therefore \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{定数} \quad \therefore y' = \text{一定}$$

$$\therefore y = Cx + D$$

§ 2 Eulerの方程式とHamiltonの原理

$I = \int_a^b F(x, y, y') dx$ が極値を取るような y を与える方程式を求める。

$y = f_m(x)$ が I を極値にするとする。

$$f(x) = f_m(x) + \delta y, \quad f'(x) = f'_m(x) + \delta y'$$

$$\begin{aligned} \delta I &= I[f] - I[f_m] = \int_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx \\ &= \int_a^b [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx \end{aligned}$$

ところで $F(x, y + \delta y, y' + \delta y') = F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'$

$$\therefore \delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx$$

δy は任意、 $\delta y'$ は δy の取り方によって決まる。

$$\therefore \delta y' = f'(x) - f'_m(x) = \frac{d}{dx} [f(x) - f_m(x)] = \frac{d}{dx} \delta y$$

これを用いて

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \left(\frac{d}{dx} \delta y \right) dx = \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b}_0 - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

$$\therefore \delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

任意の δy に対して $\delta I = 0$ になるためには

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0}$$

．．． Eulerの方程式

複数の関数の汎関数の場合

$$F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')$$

$$\text{変分は} \delta I = \int_a^b \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i' \right) dx = \int_a^b \sum_i \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) \right] \delta y_i dx$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

記号を $F \rightarrow L$, $y_i \rightarrow q_i$, $x \rightarrow t$ のように書き換えると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Lagrangeの運動方程式}$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0$$

という変分問題に対するEulerの方程式がLagrangeの運動方程式。

$\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) dt$ (作用積分) に停留値を取らせる運動が
Lagrangeの (Newtonの) 運動方程式に従う運動。 $\Leftrightarrow$ Hamiltonの原理

注意：Newtonの運動方程式を導いたというわけではなく、Newtonの運動方程式が現れるように L を選んだということである。

☆いくつかの補足説明：

●Euler-Lagrangeの方程式は力学変数 $q_i(t)$ の選び方によらない。極値は量の幾何学的な形による。変数の選び方によらない。

●Lagrangianの選び方に不定性がある。

$q_i(t)$ の関数 $W(q_1, \dots, q_n)$ の時間微分 $\frac{dW}{dt}$ を L に加えてもEuler-Lagrangeの方程式は同じ形！ 似た事情が正準変換論で重要な役割を果たす。

● $q_i(t)$ の間に束縛条件がある場合は δq_i が全て独立には取れない。

$\Rightarrow$ Lagrangeの未定係数法を使う。(非ホロノミックな束縛条件の場合も含む。)

§ 3 Lagrangeの未定係数法

束縛条件が存在する場合の変分法

束縛条件 $g_l(q_1, \dots, q_f, t) = 0$ ($l=1, 2, \dots, k < f$)が存在するとき、全ての q_i は独立ではない。
(独立なものは $f-k$ 個だけ。) 変分を取る場合も $q_i + \delta q_i$ が $g_l(q_1, \dots, q_f, t) = 0$ を満たすように取る必要あり。

$$g_l(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_f + \delta q_f, t) - g_l(q_1, q_2, \dots, q_f, t) = 0$$
$$\text{より} \quad \sum_{i=1}^f \frac{\partial g_l}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, k)$$

Hamiltonの原理より

$$\delta I = \int_a^b \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt$$

この場合の δq_i は全て独立に取ることができないので[]の中身が0とは言えない。

$q_1, \dots, q_f$ の任意の関数 λ_l を導入。

$$\lambda_l \sum_{i=1}^f \frac{\partial g_l}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, k)$$

これを用いて

$$\int_a^b \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_l \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt = 0$$

δq_i は全てが独立ではなく k コの束縛条件で関連づけられている。
つまり $f-k$ コのみ独立に取れる。 λ_l は自由に選べるので

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_l \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i} = 0 \quad i = f-k+1, \dots, f \quad (1)$$

を満たすように選ぶ。

これで $\int_a^b \sum_{i=1}^{f-k} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_l \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt = 0$ と書ける。この中の δq_i は全て独立に取ることができる。

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_l \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, f-k \quad (2)$$

が成立。(1)と(2)を合わせて、

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_l \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, f \quad (3)$$

が成立。

以上から、未知数は f 本の q_i と k 本の λ_l で合計 $f + k$ 本。一方、式の数(3)が f 本と束縛条件の式が k 本で、やはり $f + k$ 本ある。

(3)式左辺の $\sum_l \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i}$ の物理的意味は、保存力でない力が働くときのEuler-Lagrangeの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i'$$

と見比べれば束縛力であることが分かる。