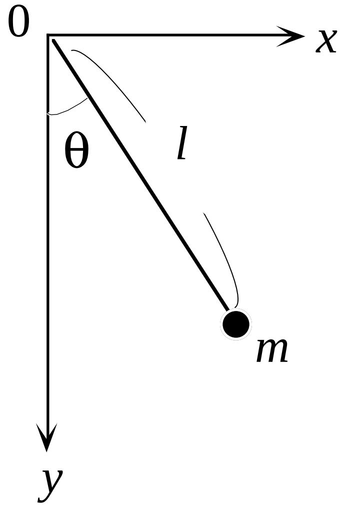
練習問題　1

簡単な関数$f(x,\quad y)$を自分で設定し、適当な束縛条件の下でLagrangeの未定係数法で極値を求めよ。
（条件付き極値問題。例、　$f(x, y) = (1/2)(x^2+y^2)$で、束縛条件$x+y=a$）

練習問題　2

図のように長さlの伸びない糸と質量mの質点からなる振り子が$x^2+y^2=l^2$の束縛条件の下で運動している。



(1)束縛力が現れない変数を選んでEuler-Lagrangeの式を作り、$\sin\theta \fallingdotseq \theta$として解け。
(2)xy−座標系でLagrangianを作り、未定係数法により x,y,λ（未定係数）の連立の運動方程式を立てよ。
(3)　(2)で得た方程式のλを含む項の物理的意味は何かを述べよ。
(4) λを消去してx, yのみの方程式をつくり、xy−座標系から平面極座標系への変換式を用いてこれが(1)で得た方程式と同じものになることを確かめよ。

Ⅴ 正準方程式と位相空間での運動

§１　Hamiltonの正準方程式

Euler−Lagrangeの運動方程式はq_i=$q_i(Q_i, \ldots. Q_f)$のように時間微分した$\dot{Q}_i$を含まない変換の場合のみその形を変えない。もし$q_i = q_i\left(Q_1, \ldots, Q_f, \dot{Q}_1, \ldots, \dot{Q}_f\right)$のように$\dot{Q}_i$が含まれているとLには$\dot{q}_i$を通して$\ddot{Q}_i$が現れることになり、形が不変にならない。

Hamiltonの運動方程式は運動量を含む変換の場合でも方程式の形が変わらない形式。（どのような変換の形であれば方程式の形が変わらないかは**正準変換論**で議論される。）

一般化運動量

運動方程式が$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$で与えられ、抵抗力などはない場合を考える。（ホロノミックな束縛はあっても良い。）

$L = \dfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x})$と書かれる場合、$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$、すなわち$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$は運動量の３成分を表している。これを一般の場合にも拡張して

$$\boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ (i = 1,2,\ldots f)}$$

と書くことにし、**一般化運動量**（q_iに共役な運動量）と呼ぶ。
自由度fの系のLagrangian、$L\left(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t\right)$が$q_j$を含まない場合（すなわち、$q_j$が循環座標である場合）、

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} =$ 定数となる。（$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$だから）

{なるべく多くの変数が循環座標になるように座標を選ぶと問題が解きやすい。}

（以下、$\{q_i\} \to q$、$\{p_i\} \to p$と一括して表すことあり。）

Lは$q, \dot{q}, t$ の関数であるから、p_iも$q, \dot{q}, t$ の関数となる。

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_1\left(q_1, \ldots\ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots\ldots, \dot{q}_f, t\right) \\ &\ \vdots \\ p_f &= p_f\left(q_1, \ldots\ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots\ldots, \dot{q}_f, t\right) \end{aligned}\right\}$$ これを未知数$\dot{q}_1, \ldots\ldots, \dot{q}_f$に関する連立方程式とみな

せば、$\begin{matrix}\dot{q}_1 = \dot{q}_1(q,p,t) \\ \vdots \\ \dot{q}_f = \dot{q}_f(q,p,t)\end{matrix}$ と解くことができる。これにより$q, \dot{q}$で表さ

れた量をq, pで表すことができる。

例、３次元極座標で、力が速度によらない場合について運動エネルギーTをq,pで表す。

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - V(r,\theta,\varphi)$$

定義より一般化運動量を求めると、

$$p_r = m\dot{r},\ \ p_\theta = mr^2\dot{\theta},\ \ p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$$

$$\therefore\ \dot{r} = \frac{1}{m}p_r,\ \ \dot{\theta} = \frac{1}{m}\frac{1}{r^2}p_\theta,\ \ \dot{\varphi} = \frac{1}{m}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi$$

これを代入して

$$T = \frac{1}{2m}\left(p_r{}^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta{}^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi{}^2\right)$$

中心力なら、V=$V(r)$なので、T-Uにはφが含まれず、φは循環座標となる。従って、p_φ = 定数。

わざわざ、一般化運動量の関数に書き換えるのは、これから定義するHamiltonianが$q, \dot{q}$の関数ではなく、q, pの関数であるから。そもそも、$\dot{q}$はqと関係があり、独立ではないが、正準方程式ではpとqとは独立な変数であるとみなす。

Hamiltonianの定義

$$H = \sum_i p_i\dot{q}_i - L(q,\dot{q},t)$$

このような定義のHamiltonianとはどのような量か？
$\{x_j\}$と$\{q_j\}$の関係に直接tが入ってこない場合はTは$\dot{q}_1,......,\dot{q}_f$の２次の同次式。
$\therefore\ \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T$、また$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$だから、結局$\sum_i p_i\dot{q}_i = 2T$。
従って、H=2T-(T-V)=T+V ⇦ 全エネルギー。

この定義のままでは、Hは$q, \dot{q}$の関数のように見えるが、$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ の逆変換

$\dot{q}=\dot{q}(q,p)$ を用いて$\dot{q}$を消去し、Hを$q,\ p$の関数とする。（ここで、$q,\ p$はそれぞれ独立な量とみなされる。）

Lagrangeの運動方程式はHamiltonの原理に対するEulerの方程式であったが、LをHで表した場合にはどのような関係が得られるだろうか？

Lagrangeの運動方程式の場合は実現される運動$q_j(t)$から途中の経路を微小に変えたときの$\int Ldt$の変化（$\delta\int Ldt$）が0になるということを使った。このとき、$q_1,\ldots,q_f$のみ独立に変化させ、$\delta\dot{q}_i$はδq_iから導き、独立には変化させなかった。

これに対し、Hamiltonianは$q_1,\ldots,q_f$と$p_1,\ldots,p_f$の関数と考え、（実際の運動ではqの変化とpの変化は無関係ではないが、Hamiltonianの変数としてはこれらは独立として取り扱う。）$2f$この変数を座標軸とする抽象的な$2f$次元空間内の各点ごとに値の決まった関数と見る。この空間を**位相空間**と呼ぶ。

位相空間内の実現される曲線から微小にずれた軌道を想定し、Hamiltonの原理を拡張する。つまり$q_i \rightarrow q_i+\delta q_i$, $p_i \rightarrow p_i+\delta p_i$とし、$\delta q_i$、$\delta p_i$は独立に取れるものとし、$L$のかわりに次の量を用いる。

$$\bar{L}=\sum_i p_i\dot{q}_i-H$$

この量は数値的にはLagrangianと同じであるが、$q_1,\ldots,q_f$と$p_1,\ldots,p_f$の$2f$個の独立変数の関数である。この関数で変分を考える。

$$0=\delta\int_{t_1}^{t_2}\bar{L}dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left\{\dot{q}_i\delta p_i+p_i\delta\dot{q}_i-\delta H\right\}dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left\{\dot{q}_i\delta p_i+p_i\underline{\delta\dot{q}_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right\}dt$$

$\delta\dot{q}_i$は独立ではないので$\frac{d}{dt}\delta q_i$を利用した部分積分を利用。

つまり、$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}p_i\frac{d\delta q_i}{dt}=\left[p_i\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}_i\delta q_i dt$

結局、$\displaystyle\delta\int_{t_1}^{t_2}\bar{L}dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left\{\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i-\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right\}dt=0$

これが独立な任意のδq_i、δp_iに対して成り立つためには、

$$\boxed{\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ , \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i = 1,2....f)}$$

Hamiltonの正準方程式

未知量q,pに関する連立方程式。Newtonの運動方程式に比べて変数が２倍に増えているが、時間微分が１階に減っている。

$H(q, p)$の保存則はどうなっているか？

$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \right)$、これに正準方程式を代入して

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

つまり、Hamiltonianが時間tを直接含まないときはHは時間変化しない。→エネルギー保存則。

例１　<u>質量mの一次元の調和振動子</u>

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0{}^2x^2$$

従って、$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$、$\therefore\ H = p\dot{x} - L\ = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega_0{}^2x^2$

正準方程式は

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m}p\ , \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\,m\omega_0{}^2x$$

例２　<u>荷電粒子の電磁相互作用</u>

質量m、電荷eの粒子に、電場$\mathbf{E}$と磁場$\mathbf{H}$が働いている時の運動方程式

$$m\ddot{x} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right) \qquad \text{（右辺はLorentz力）}$$

これを正準方程式として与えるようなHamiltonianは？

$\mathbf{E} = -\,\nabla A_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$、　$\nabla\times$　の関係を用いればよい。ただし$\mathbf{A}$,　A_0はそれぞれ、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャル。

$H=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+eA_0$とすればよい。正準方程式は、各成分について

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{1}{m}\left(p_i-\frac{e}{c}A_i\right)$$
$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}=\frac{e}{mc}\sum_{j=1}^{3}\left(p_i-\frac{e}{c}A_i\right)\frac{\partial A_i}{\partial t}-e\frac{\partial A_0}{\partial x_i}\qquad i=1,2,3$$

これが先の運動方程式に一致することを調べればよい。

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_i&=\dot{p}_i-\frac{e}{c}\frac{dA_i}{dt}=\dot{p}_i-\frac{e}{c}\sum_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}-\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\\&=-e\frac{\partial A_0}{\partial x_i}+\frac{e}{mc}\sum_{j=1}^{3}\left(p_j-\frac{e}{c}A_j\right)\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-\frac{e}{c}\sum_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}-\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\\&=-e\frac{\partial A_0}{\partial x_i}+\frac{e}{c}\sum_{j=1}^{3}\dot{x}_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-\frac{e}{c}\sum_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j-\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\\&=eE_i+\frac{e}{c}\left\{\dot{\mathbf{x}}\times(\nabla\times\mathbf{A})\right\}_i\end{aligned}$$

電磁場と相互作用する荷電粒子のHamiltonianは自由粒子のそれにおいて

$$H\Rightarrow H+eA_0$$
$$\mathbf{p}\Rightarrow\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}$$

とすればよい。

§２　位相空間内での運動

Newtonの運動方程式の立場

３次元空間の中をNこの粒子がどのように動くかを調べる。Nセットの位置と速度を与える。

Lagrangeの運動方程式の立場

一般化座標$q_1,\ldots,q_{3N}$によって張られる3N次元の空間を想定する。２粒子の場合（３次元の空間中に２点を考えるのではなく）６次元空間の中を１つの点が動くと考える。3N次元空間でqと$\dot{q}$を与える。

Hamiltonの運動方程式の立場

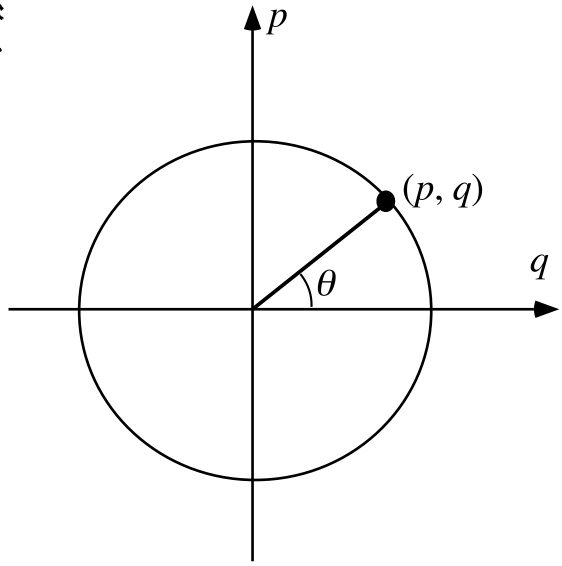
座標と運動量の混ざったような変換も考えるので、座標だけで張られる空間を考えるのは不便。→　座標と運動量を一緒にした6N次元の空間を考え、この空間中に１点を与える。位相空間．．．多数の粒子を扱う統計力学の立場で重要な手法。

Hamiltonianがtを直接含まない場合、$H(q,p)$は位相空間の中の各点ごとに決まった値を与える。$t=0$の初期条件として系の全質点の位置と運動量を与えれば、H（全エネルギー）、$\dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$の値が決まる。従って、

$\Delta q_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}\Delta t$, $\Delta p_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\Delta t$ のようにその後の微小時間にq,pがどう変化するかがわかる。つまり$\dot{q}, \dot{p}$ を積分すればよい。

１次元調和振動子の例

簡単のため質量１、角振動数１とする。つまり$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$
一定のエネルギーEの運動は位相空間では原点を中心とする半径$(2E)^{1/2}$の円周上で起こる。位相空間における力学系を示す点を代表点と呼び、その運動の軌跡をtrajectoryと呼ぶ。



$$q = \sqrt{2E}\cos\theta$$
$$p = \sqrt{2E}\sin\theta$$
と変換すると、

正準方程式より

$$\dot{q} = -\sqrt{2E}\,\dot{\theta}\sin\theta = -\dot{\theta}p = \frac{\partial H}{\partial p} = p$$
$$\dot{p} = \sqrt{2E}\,\dot{\theta}\cos\theta = \dot{\theta}q = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q$$
$$\therefore\ \dot{\theta} = -1$$

つまり、代表点は半径$(2E)^{1/2}$の円周上を等角速度で、時計の向きに回転する。角速度はエネルギーEに無関係（調和振動子の特徴）。

出発時刻と初期条件が決まれば、以降の運動は選択の余地無く一意的に確定する。これは１階の微分方程式になったから。
座標だけの空間だと初速度の与え方により色々な軌道が可能になる。

問題　中心力場で１粒子が運動する系のLagrangianは球面座標で

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - V(r)$$

で与えられる。
１．r,θ,φに共役な運動量を求めよ。
２．共役な運動量を用いてHamiltonianを作れ。
３．Hamiltonの運動方程式を書き下せ。