VI 正準変換とPoisson括弧

§１　正準変換

ここではどのような変換であれば正準方程式の形が不変に保たれるのかを議論する。

前章で正準方程式、

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\ ,\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\ \ (i=1,2....f)$$

は$\bar{L}=\sum_i p_i\dot{q}_i-H$を定義し、これにより作用積分$I=\int_{t_1}^{t_2}\bar{L}dt$を定義して変分原理を用いることにより得られた。

q_iとp_iの任意の関数$W(q;p)$の時間微分を$\bar{L}$に加えて$\bar{L}$の代わりに $\bar{L}+\frac{dW(q;p)}{dt}$を用いても同じ正準方程式が得られる。

なぜなら、qとpは t の関数だから

$\int_{t_1}^{t_2}\frac{dW}{dt}dt=W\left(q(t_2),p(t_2),t_2\right)-W\left(q(t_1),p(t_1),t_1\right)$は$t_1$、$t_2$だけで値が決まってしまい、

途中の位相空間の経路によらない。従って$\frac{dW(q;p)}{dt}$は変分の停留性とは無関係。
以降、正準変換論ではこのことが重要な役割を果たす。

Hamiltonianが正準変数q_i、p_i（$i=1,2,.....f$)で与えられているとする。

$$\left.\begin{aligned}H&=H(q;p,t)\\ \dot{q}_i&=\frac{\partial H(q;p,t)}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i&=-\frac{\partial H(q;p,t)}{\partial q_i}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

変換
$$\left.\begin{aligned}q_i&=q_i\left(Q_1,Q_2,.....Q_f,P_1,P_2,.....P_f\right)\\ p_i&=p_i\left(Q_1,Q_2,.....Q_f,P_1,P_2,.....P_f\right)\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

で結ばれる新しい変換Q_i ，P_iが正準変数（正準方程式を成立させる変数）であるための条件はどのようなものか？　ただし逆変換が存在するとする。

Q_i , P_iが正準変数ならばHamiltonian $\tilde{H}$が存在し、

$$\left.\begin{aligned} \tilde{H} &= \tilde{H}(Q; P, t) \\ \dot{Q}_i &= \frac{\partial \tilde{H}(Q; P, t)}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial \tilde{H}(Q; P, t)}{\partial Q_i} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

が成立する。(1),(3)が両立するためには、

$$\bar{L} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q; p,t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(Q; P,t) + \frac{dW}{dt} \qquad (4)$$

Wは正準変数とtの任意の関数。(2)を用いて(4)の左辺を書き換えて右辺になれば(2)は正準変数(q, p)から正準変数$(Q; P)$への変換。なぜなら$\frac{dW}{dt}$は運動方程式に寄与しないから。（すなわち(2)は正準変換。）

(4)はq, p, Q, P, tの$4f+1$個の変数を含む。(2)より$2f$個の関係があるので、$4f+1$個のうち$2f$個は残り$2f+1$個を使って表すことができる。Wをq, Q, tで表すと

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial W}{\partial t}$$

これを(4)に代入すると

$$\bar{L} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q; p,t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(Q; P,t) + \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial W}{\partial t}$$

$$\therefore \bar{L} = \sum_i \left(p_i - \frac{\partial W}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \sum_i \left(P_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i = H(q; p,t) - \tilde{H}(Q; P,t) + \frac{\partial W}{\partial t}$$

この式が恒等的に成立するためには

$$\boxed{p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \; P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i}, \; \tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (5)}$$

（$= H$ ...Wが直接tを含まないとき）

関数$W(q,Q,t)$を変換の母関数と呼ぶ。Wが先に与えられると(2)の変換が決まる。

例、　自由度1の系について

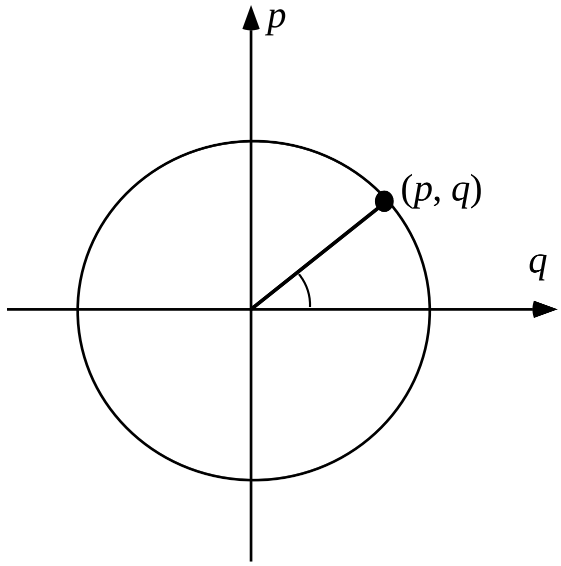
$$W = \frac{1}{2} q^2 \cot Q$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = q \cot Q, \qquad P = -\frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{1}{2} q^2 \mathrm{cosec}^2 Q$$

$$\therefore q = \sqrt{2P}\sin Q \\ p = \sqrt{2P}\cos Q$$ Poincaré**（ポアンカレ）変換**

これは正準変換だからこの変換で正準方程式が成り立つ。

１次元調和振動子の場合

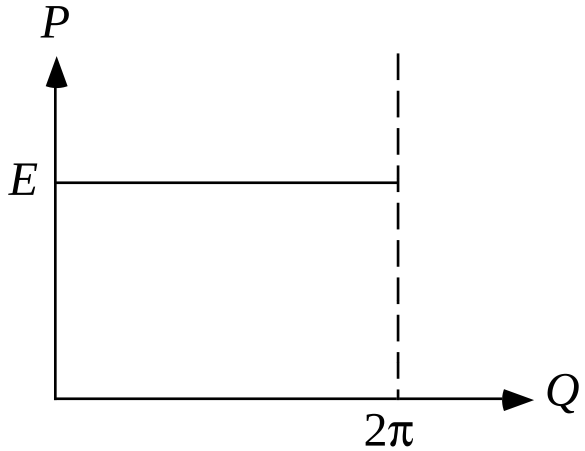


$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{H} = P$$

正準方程式は
$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 1$$
$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0$$

代表点はP=E**の線上を左から右へ**
エネルギーに無関係な等速度で進む。。

位置と運動量が混じり、もはやどれが位置、
どれが運動量の区別が無くなる。



Wをq, P, tで表す場合

$P_i\dot{Q}_i = \dfrac{d}{dt}\left(P_iQ_i\right) - Q_i\dot{P}_i$**の関係を利用し、**(4)**を**

$$\sum_i p_i\dot{q}_i - H(q;p,t) = -\sum_i Q_i\dot{P}_i - \tilde{H}(Q;P,t) + \frac{d}{dt}\left(W + \sum_i P_iQ_i\right) \qquad (6)$$

と書き直す。$W' = W + \sum_i P_iQ_i$**を**q, P, t**の関数にしたとして**

$$\frac{dW'}{dt} = \sum_i\left(\frac{\partial W'}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial W'}{\partial P_i}\dot{P}_i\right) + \frac{\partial W'}{\partial t}$$

(6)に代入すると、

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial W'}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i + \sum_i \left(Q_i - \frac{\partial W'}{\partial P_i}\right)\dot{P}_i = H(q;p,t) - \tilde{H}(Q;P,t) + \frac{\partial W'}{\partial t}$$

↓

$$\boxed{p_i = \frac{\partial W'}{\partial q_i},\ Q_i = \frac{\partial W'}{\partial P_i},\ \tilde{H} = H + \frac{\partial W'}{\partial t} \qquad (7)}$$

p, Q, tを用いるときは　$W'' = W - \sum_i p_i q_i$として同様に

$$\boxed{q_i = -\frac{\partial W''}{\partial p_i},\ P_i = -\frac{\partial W''}{\partial Q_i},\ \tilde{H} = H + \frac{\partial W''}{\partial t} \qquad (8)}$$

p, P, tを用いるときは$W''' = W + \sum_i \left(P_i Q_i - p_i q_i\right)$として同様に

$$\boxed{q_i = -\frac{\partial W'''}{\partial p_i},\ Q_i = \frac{\partial W'''}{\partial P_i},\ \tilde{H} = H + \frac{\partial W'''}{\partial t} \qquad (9)}$$

W, W', W'', W'''　⇦　全て母関数。

例、　恒等変換

$$W' = \sum_i P_i q_i$$

(7)より　$p_i = P_i,\ Q_i = q_i$

§２　無限小変換

恒等変換から無限小だけずれた変換。

無限小変換の母関数

$$W' = \sum_i P_i q_i + \varepsilon G(q;p) \qquad \varepsilon:\ \text{無限小のパラメーター}$$

Gは$\{q\},\{p\}$の関数と考えても、$\{q\},\{P\}$の関数と考えても同じ。（両者の差は高次の無限小）

$$p_i = \frac{\partial W'}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon\frac{\partial G(q;p)}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial W'}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon\frac{\partial G(q;P)}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon\frac{\partial G(q;p)}{\partial p_i}$$

これらの差は高次の無限小

$$\delta q_i \equiv Q_i - q_i$$
$$\delta p_i \equiv P_i - p_i$$
と書くと、

$$\left.\begin{aligned} \delta q_i &= \varepsilon \frac{\partial G(q;p)}{\partial p_i} \\ \delta p_i &= -\varepsilon \frac{\partial G(q;p)}{\partial q_i} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$G(q;\, p)$**を与えると**(10)**から**δq_i, δp_i**が定まる。**

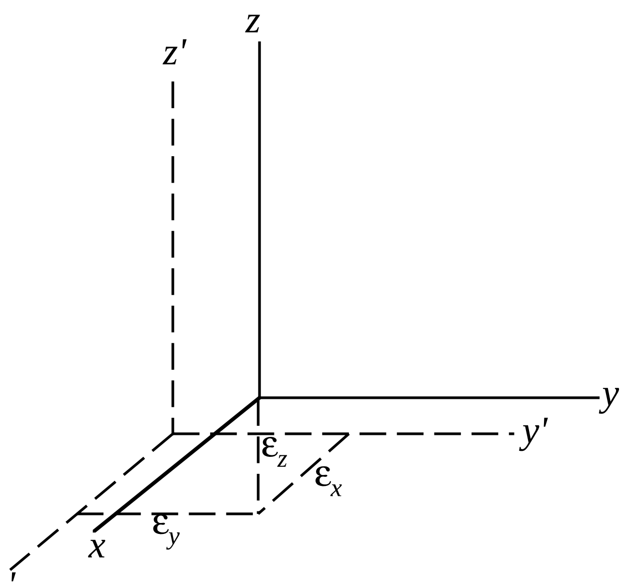
ここで$G(q;\, p)$**は無限小変換の母関数。**

例１　座標の無限小推進

$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$; $\boldsymbol{\varepsilon}$**は無限小ベクトル**
各座標軸は平行に移動
空間推進(space translation)

$$\delta x_i \equiv x_i' - x_i = \varepsilon_i$$
$$\delta p_i \equiv p_i' - p_i = 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

（運動量は変化しない）



３次元空間の無限小
空間推進の母関数G**は**

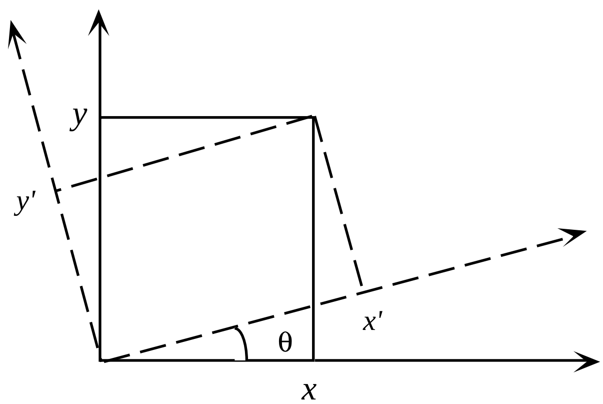
$$\varepsilon G = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i p_i$$
すなわち、空間推進の母関数は運動量。

例２　無限小回転（２次元の場合）

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

θ無限小の時、$\begin{cases} \sin\theta = \varepsilon \\ \cos\theta = 1 \end{cases}$、

従って、$\begin{aligned} x' &= x + \varepsilon y \\ y' &= y - \varepsilon x \end{aligned}$、 $\begin{cases} \delta x = \varepsilon y \\ \delta y = -\varepsilon x \end{cases}$



$$\begin{cases} \delta p_x = m(\dot{x}' - \dot{x}) = \varepsilon p_y \\ \delta p_y = m(\dot{y}' - \dot{y}) = -\varepsilon p_x \end{cases}$$

無限小回転の母関数は$G=(yp_x - xp_y)$　すなわち角運動量
３次元の場合は回転軸の周りの角運動量（符号は-）$\mathbf{G} = \mathbf{p} \times \mathbf{x}$

例３　時間推進

$q_i(t)$**と**$q_i(t+\varepsilon)$**を比較。**　ε**が無限小の時、**

$$\begin{cases} \delta q_i = q_i(t+\varepsilon) - q_i(t) = \varepsilon \dot{q}_i(t) \\ \delta p_i = p_i(t+\varepsilon) - p_i(t) = \varepsilon \dot{p}_i(t) \end{cases}$$

正準方程式のよると

$$\begin{cases} \delta q_i = \varepsilon \dot{q}_i(t) = \varepsilon \dfrac{\partial H(q;p)}{\partial p_i} \\ \delta p_i = \varepsilon \dot{p}_i(t) = -\varepsilon \dfrac{\partial H(q;p)}{\partial q_i} \end{cases}$$

従って、変換の母関数は Hamiltonian $H(q;p)$

§２　Poissonの括弧

正準変換論を別の形に書き、見通しを良くする。Poisson**括弧が不変だとそのような変換は正準変換。無限小変換と関係し、不変性と保存則が結びつく。**

座標q_i**と運動量**p_i**、時間** t **の関数で表される量　⇨　力学変数**

例、運動エネルギーT**、角運動量**$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i$
１つの力学変数をF**とする。**

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i \right)$$

$\dot{q}_i, \dot{p}_i$**に正準方程式を適用すると、**

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$　**と変形される。**

一般に２つの力学変数に対し、

$$[A, B] \equiv \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$$

と定義される量を考え、Poisson**の括弧式という。**
この記号により、

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H]$$

F**が**t**を直接含まない時は**$\frac{dF}{dt} = [F, H]$**。**
$[F, H] = 0$**ならば力学変数は時間的に一定。**

Poisson**括弧式の例、**

$$[p_i, p_j] \equiv \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = 0$$

$$[q_i, q_j] \equiv \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = 0$$

$$[p_i, q_j] \equiv \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = -\sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} = -\delta_{ij}$$

Poisson**括弧と正準変換の関係**

$$\left.\begin{aligned} q_i &= q_i(Q_1, Q_2, \ldots.. Q_f, P_1, P_2, \ldots.. P_f) \\ p_i &= p_i(Q_1, Q_2, \ldots.. Q_f, P_1, P_2, \ldots.. P_f) \end{aligned}\right\}$$ **が正準変換であるとき、**

$$[A, B] = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k} \right) = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial Q_k}\frac{\partial B}{\partial P_k} - \frac{\partial A}{\partial P_k}\frac{\partial B}{\partial Q_k} \right)$$ **が成り立つ。**

すなわち、Poisson**括弧式を不変にする変換は正準変換である。**

前出のF**を**q_i**、**p_i**にすると**

$$\underbrace{\dot{q}_i = [q_i, H], \dot{p}_i = [p_i, H]}_{\text{正準方程式に同じ。}}$$ ⇦ **これを正準方程式とも言う。**

なぜなら、

$$\sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Poisson括弧式と無限小変換

Poisson括弧は無限小変換を表すのに便利
q_i、p_iの関数$F(q, p)$を考える。無限小だけ異なる正準変換

$$Q_i = q_i + \delta q_i$$
$$P_i = p_i + \delta p_i$$

を代入したものを$F(Q, P)$と書く。１次の無限小まで書くと、

$$F(Q, P) = F(q + \delta q, p + \delta p) = F(q, p) + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i \right)$$

$$= F(q, p) + \varepsilon \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

$$= F(q, p) + \varepsilon [F, G]$$

ただし、$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}$, $\delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$

Fの無限小変化がFと変換の母関数GとのPoisson括弧式で表せた。

$F = q_i, F = p_i$を取ると、$\begin{matrix} \delta q_i = \varepsilon [q_i, G] \\ \delta p_i = \varepsilon [p_i, G] \end{matrix}$, $\begin{cases} \delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \\ \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \end{cases}$ に同じもの。

FとしてHamiltonianを取ると、$\underbrace{H(Q, P) - H(q, p) = \varepsilon [H, G]}$

無限小変換がHamiltonianに及ぼす変化を表す恒等式。

正準方程式より得られた、$\frac{dG}{dt} = -[H, G]$を用いると、

$$\boxed{H(Q, P) - H(q, p) = -\varepsilon \frac{dG}{dt}}$$

もしGで生成される無限小変換がHamiltonianを変えないなら母関数G
は時間によらない。　⇦　重要な定理
Hamiltonianのある変換に対する不変性と母関数の保存則を結びつける定理。

例、２粒子系

$$H = \frac{1}{2m_1}\mathbf{p}_1{}^2 + \frac{1}{2m_2}\mathbf{p}_2{}^2 + \mathrm{V}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$$

無限小変換

$$\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_1 + \varepsilon$$
$$\mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_2' = \mathbf{x}_2 + \varepsilon$$
$$\mathbf{p}_1 \to \mathbf{p}_1' = \mathbf{p}_1$$
$$\mathbf{p}_2 \to \mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_2$$

を代入して不変。
変換の母関数は全運動量。　⇨　全運動量が不変。
例、軸の周りの回転

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \mathrm{V}(r)$$

空間のいかなる軸の周りの回転に対しても値を変えない。
⇩
全ての軸の周りの回転の母関数が保存　⇨　角運動量が保存。

Hamiltonian**の対称性を見ると保存則が得られる。**

$q_i = q_i(Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_f, P_1, P_2, \ldots\ldots P_f)$
$p_i = p_i(Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_f, P_1, P_2, \ldots\ldots P_f)$ **の形の変換で正準変数**$\{q, p\}$, $\{Q, P\}$**が結ばれているとき、**Poisson**括弧式は不変、すなわち**

$$[A, B] = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right) = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial Q_k}\frac{\partial B}{\partial P_k} - \frac{\partial A}{\partial P_k}\frac{\partial B}{\partial Q_k}\right)$$

が成立する。

無限小正準変換である場合に証明。

$$\frac{\partial}{\partial q_k} = \sum_l \left(\frac{\partial Q_l}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial Q_l} + \frac{\partial P_l}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial P_l}\right) = \sum_l \left(\frac{\partial(q_l + \delta q_l)}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial Q_l} + \frac{\partial(p_l + \delta p_l)}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial P_l}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial Q_k} + \sum_l \left(\frac{\partial \delta q_l}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial Q_l} + \frac{\partial \delta p_l}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial P_l}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_k} + \varepsilon\sum_l \left(\frac{\partial^2 G}{\partial p_l q_k}\frac{\partial}{\partial Q_l} - \frac{\partial^2 G}{\partial q_k q_l}\frac{\partial}{\partial P_l}\right)$$

ただし、$\delta q_i = \varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_i}$, $\delta p_i = -\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}$ **を用いた。**

全く同様に$\dfrac{\partial}{\partial p_k}=\dfrac{\partial}{\partial P_k}+\varepsilon\sum_l\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial p_k p_l}\dfrac{\partial}{\partial Q_l}-\dfrac{\partial^2 G}{\partial p_k q_l}\dfrac{\partial}{\partial P_l}\right)$

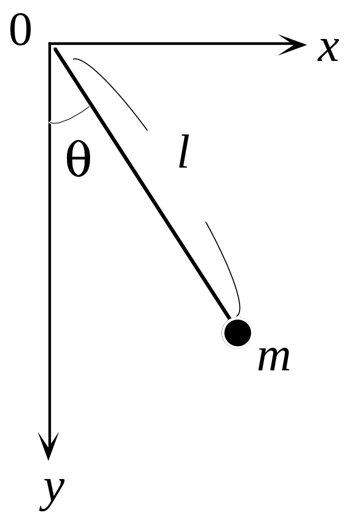
εの１次まで考慮すると、

$$
\begin{aligned}
\sum_k\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k}-\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right)=&\sum_k\left(\frac{\partial A}{\partial Q_k}\frac{\partial B}{\partial P_k}-\frac{\partial A}{\partial P_k}\frac{\partial B}{\partial Q_k}\right)\\
&+\varepsilon\sum_{k,l}\left(\frac{\partial A}{\partial Q_k}\frac{\partial^2 G}{\partial p_k\partial p_l}\frac{\partial B}{\partial Q_l}-\frac{\partial A}{\partial Q_k}\frac{\partial^2 G}{\partial p_k\partial q_l}\frac{\partial B}{\partial P_l}\right)\\
&+\varepsilon\sum_{k,l}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial p_l\partial q_k}\frac{\partial A}{\partial Q_l}\frac{\partial B}{\partial P_k}-\frac{\partial^2 G}{\partial q_k\partial q_l}\frac{\partial A}{\partial P_l}\frac{\partial B}{\partial P_k}\right)\\
&-\varepsilon\sum_{k,l}\left(\frac{\partial A}{\partial P_k}\frac{\partial^2 G}{\partial p_l\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial Q_l}-\frac{\partial A}{\partial P_k}\frac{\partial^2 G}{\partial q_k\partial q_l}\frac{\partial B}{\partial P_l}\right)\\
&-\varepsilon\sum_{k,l}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial p_k\partial p_l}\frac{\partial A}{\partial Q_l}\frac{\partial B}{\partial Q_k}-\frac{\partial^2 G}{\partial p_k\partial q_l}\frac{\partial A}{\partial P_l}\frac{\partial B}{\partial Q_k}\right)
\end{aligned}
$$

右辺第２項目以降のεに比例した項は全て打ち消し合う。

練習問題１

図のように長さlの糸の端に質量mの質点をつけた単振り子に対するHamiltonianを求め、正準方程式がNewtonの運動方程式と同じものになることを確かめよ。



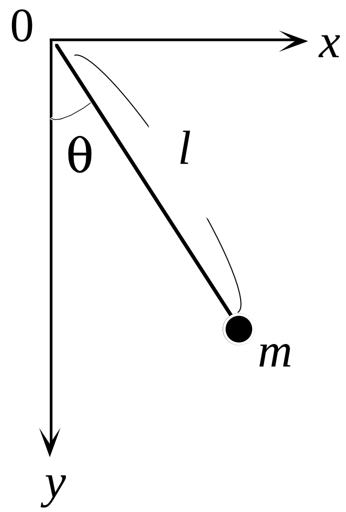
練習問題２

Hamiltonianが$H=\dfrac{1}{2m}\mathbf{p}^2+\mathrm{V}(r)$ で表される、中心力場内を運動する質点の角運動量を考える。x軸方向の角運動量$l_x=yp_z-zp_y$の時間変化を$\dfrac{dF}{dt}=[F,H]$の関係を用いて調べよ。ただしFは任意の力学変数である。

練習問題３

デカルト座標から平面極座標への点変換を考える。
$q_1=x,\ q_2=y;\ \ Q_1=r,\ Q_2=\theta$ として、Q,pをq,Pで表す場合の変換の母関数を求めよ。

練習問題１



図のように長さlの糸の端に質量mの質点をつけた単振り子に対するHamiltonianを求め、正準方程式がNewtonの運動方程式と同じものになることを確かめよ。

解答

$H = \dfrac{{p_\theta}^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$、**これより正準方程式は**

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}\,,\; \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

$$\therefore\ \ddot{\theta} = \frac{\dot{p}_\theta}{ml^2} = -mgl\sin\theta\,/\,\left(ml^2\right) = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

練習問題２

Hamiltonian**が**$H = \dfrac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \mathrm{V}(r)$ **で表される、中心力場内を運動する質点の角運動量を考える。**x**軸方向の角運動量**$l_x = yp_z - zp_y$**の時間変化を** $\dfrac{dF}{dt} = [F, H]$**の関係を用いて調べよ。ただし**F**は任意の力学変数である。**

解答

$$\frac{dl_x}{dt} = \frac{\partial l_x}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial l_x}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial l_x}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial l_x}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial l_x}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial p_z} - \frac{\partial l_x}{\partial p_z}\frac{\partial H}{\partial z}$$

により計算。$l_x = yp_z - zp_y$**より、**

$$\frac{\partial l_x}{\partial x} = 0\,,\quad \frac{\partial l_x}{\partial y} = p_z\,,\quad \frac{\partial l_x}{\partial z} = -p_y$$

$$\frac{\partial l_x}{\partial p_x} = 0\,,\quad \frac{\partial l_x}{\partial p_y} = -z\,,\quad \frac{\partial l_x}{\partial p_z} = y$$

また、$H = \dfrac{1}{2m}\left({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2\right) + \mathrm{V}(r)$**であるから**

$\dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{\partial V(r)}{\partial x} = \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial V(r)}{\partial r}$, $\dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{m}$、　y, z**成分も同様。**

これらを代入すれば

$$[l_x, H] = \frac{1}{m}(p_y p_z - p_z p_y) + (zy - yz)\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr} = 0$$

従って、$\frac{dl_x}{dt} = 0$

他の成分も同様に保存量になっていることが分かる。

練習問題３

デカルト座標から平面極座標への点変換を考える。
$q_1 = x, q_2 = y;\ Q_1 = r, Q_2 = \theta$ として、Q,pをq,Pで表す場合の変換の母関数を求めよ。

解答

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta \qquad q_1 = Q_1\cos Q_2,\quad q_2 = Q_1\sin Q_2$$

$$p_x = p_r\cos\theta - \frac{1}{r}p_\theta\sin\theta$$ であるから、 $$p_1 = P_1\cos Q_2 - \frac{P_2}{Q_1}\sin Q_2$$

$$p_y = p_r\sin\theta + \frac{1}{r}p_\theta\cos\theta \qquad p_2 = P_1\sin Q_2 + \frac{P_2}{Q_1}\cos Q_2$$

となる。Q,pをq,Pで表す場合を考えると、

$$Q_1 = \sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2},\quad Q_2 = \tan^{-1}\frac{q_2}{q_1}$$

$$p_1 = \frac{P_1 q_1}{\sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2}} - \frac{P_2 q_2}{{q_1}^2 + {q_2}^2}$$

$$p_2 = \frac{P_1 q_2}{\sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2}} + \frac{P_2 q_1}{{q_1}^2 + {q_2}^2}$$

であるから、 $p_i = \frac{\partial W'}{\partial q_i}, Q_i = \frac{\partial W'}{\partial P_i},\ \tilde{H} = H + \frac{\partial W'}{\partial t}$ と見比べると、この変換の母関数は、

$$W' = P_1\sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2} + P_2\tan^{-1}\frac{q_2}{q_1}$$

であることが分かる。元の記号に戻すと、

$$W' = p_r\sqrt{x^2 + y^2} + p_\theta\tan^{-1}\frac{y}{x}$$