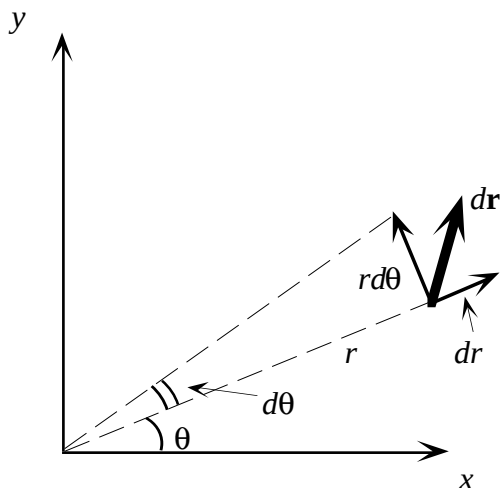


§ 3 平面極座標での一般化力

前節で天下りの的にEuler-Lagrangeの方程式を与えたが、もう少し系統的に「座標により形が変わらない形式」を考えるための準備として座標を変えたときに、その座標で**速度**や**加速度**はどのように表されるのかを考えてみる。

ここでは数多くある変数変換のうち、特に良く用いられる平面直交座標から平面極座標への変換を例に取る。

平面極座標による運動方程式を考える。 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$



平面極座標での微小変位 $d\mathbf{r}$

$$(d\mathbf{r})_r = dr \dots \dots \dots (1)$$

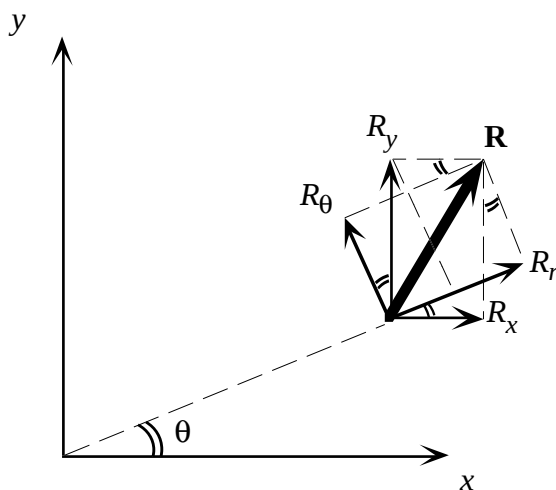
$$(d\mathbf{r})_\theta = r d\theta \dots \dots \dots (2)$$

(dr と $r d\theta$ は次元が同じ。)

微小面積は $r dr d\theta$

$v_r, v_\theta, a_r, a_\theta$ はどのように表されるだろうか。ただし添字の r, θ は動径方向の成分、角度方向の成分であることをそれぞれ示している。
また微小仕事 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy$ を $Q_r dr + Q_\theta d\theta$ と表したとしたら、 Q_r, Q_θ はどのような量になるのか。

任意のベクトルの r 方向と θ 方向への分解。



図より

$$\begin{cases} R_r = R_x \cos \theta + R_y \sin \theta \dots \dots \dots (3) \\ R_\theta = -R_x \sin \theta + R_y \cos \theta \end{cases}$$

逆に解いて

$$\begin{cases} R_x = R_r \cos \theta - R_\theta \sin \theta \dots \dots \dots (4) \\ R_y = R_r \sin \theta + R_\theta \cos \theta \end{cases}$$

r 方向、 θ 方向の速度は

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta & \dots\dots\dots(5) \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

$\dot{x} = v_x, \dot{y} = v_y$ だから(4),(5)を見比べて

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}$$

が分かる。

r 方向、 θ 方向の加速度は

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin \theta & \dots\dots\dots(6) \\ \ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta \end{cases}$$

同じく(4),(6)を見比べて

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$a_r = \frac{dv_r}{dt}, \quad a_\theta = \frac{dv_\theta}{dt}$ にならないことに注意！
(r 方向、 θ 方向が時間と共に変化していくため。)

Newtonの運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ を r 成分と θ 成分に分けると

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r, \quad m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = F_\theta \dots\dots\dots(7)$$

中心力の場合は $F_r = F(r), \quad F_\theta = 0$
よって $m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$
変形して $\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$
これより $mr^2\dot{\theta} = mrv_\theta = \text{一定}$
すなわち面積速度($= rv_\theta / 2$)一定の
原理が出てくる。

Newtonの運動方程式は2つの座標系でその形がかなり異なったが、それらをよく似た形式で表せないだろうか。

直交座標での質点の平面運動に戻ると $p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}$ より運動方程式は

$$\frac{d}{dt}p_x = F_x, \quad \frac{d}{dt}p_y = F_y \dots\dots\dots(8)$$

と書かれる。

一方 p_x, p_y の表式は、運動エネルギーの表式 $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ より

$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}$ として導かれる。従って、(8)は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = F_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = F_y$$

と書ける。

さらに $\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$ であるから

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = F_y \dots\dots\dots(9)$

という形にできる。

(r, θ) 座標系でも同じ形式で書けるか？

運動エネルギーは $v_r = \dot{r}, v_\theta = r\dot{\theta}$ より $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

従って、 $\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ となる。

これらの第1式目は(7)の第1式を考慮すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = F_r + mr\dot{\theta}^2 \quad \dots\dots\dots(10)$$

と変形される。(10)を見ると、 F_r の他に $mr\dot{\theta}^2$ (遠心力) という見掛けの力が働いていることが分かる。一方、第2式は(7)の第2式から

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = rF_\theta \dots\dots\dots(11)$$

と変形される。左辺は力の次元を持っていないことに注意。従って右辺も F_θ ではなく rF_θ となっている。

ところで、(x, y) 座標系では微小変位 $d\mathbf{r}$ を行ったときに力 $\mathbf{F}$ のする仕事は $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy$ である。一方、(r, θ) 座標系では

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_r(d\mathbf{r})_r + F_\theta(d\mathbf{r})_\theta = F_r dr + F_\theta r d\theta$$

である。(右式への変形は(1),(2)より分かる。)

極座標系において も直交座標系と同じ形式で微小仕事を $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Q_r dr + Q_\theta d\theta$ と書くことにすると、

$$Q_r = F_r, \quad Q_\theta = rF_\theta$$

となる。このとき Q_r , Q_θ をそれぞれの座標 r , θ に対する**一般化力**と呼ぶ。
(10),(11)をこれらの定義を用いて書き直すと、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = Q_r + mr\dot{\theta}^2, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = Q_\theta$$

と書ける。

ところで $\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2$, $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ なのでこれを利用すると、さらに

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta}$$

と変形できる。これで極座標での運動方程式を直交座標での運動方程式、すなわち(9)と同じ形式に書くことができた。

§ 4 一般化座標と一般化力

(r, θ)座標系での力にあたる量 (一般化力) は $Q_r = F_r$, $Q_\theta = rF_\theta$ と求めることができた。もっと一般の座標系では力はどうのように表されるか？

直交座標で N 個の質点からなる質点系を記述する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{座標; } x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N \\ \text{速度成分; } \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N \\ \text{運動量の成分; } p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, p_{2x}, p_{2y}, p_{2z}, \dots, p_{Nx}, p_{Ny}, p_{Nz} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{運動エネルギーは } T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} (p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2) \end{aligned}$$

である。3個ずつをひとまとめにせず通し番号を付けると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{座標; } x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N} \\ \text{速度成分; } \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dots, \dot{x}_{3N-2}, \dot{x}_{3N-1}, \dot{x}_{3N} \\ \text{運動量の成分; } p_1, p_2, p_3, \dots, p_{3N-2}, p_{3N-1}, p_{3N} \end{array} \right.$$

となる。

変換する先の座標を一般に $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ とする（一般化座標）
 直交座標 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ との関係は

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{aligned}$$

と表されているとする。
 直交座標系での微小変位による仕事は

$$\delta W = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots + F_n dx_n = \sum_{i=1}^n F_i dx_i$$

であるが、一般化座標 $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ での微小変位による仕事は一般化力 Q_i によって

$$\delta W = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \dots + Q_n dq_n = \sum_{i=1}^n Q_i dq_i$$

と書ける。

Q_i と F_i の関係は？

$q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ の微小な変化 $dq_1, dq_2, \dots$ による x_i の変化は

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} dq_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j$$

である。これを $\delta W = \sum_{i=1}^n F_i dx_i$ に代入して

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right] dq_j \equiv \sum_{j=1}^n Q_j dq_j$$

従って、

$$Q_j = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

であることが判る。 $Q_j dq_j$ は仕事の次元を持つが、 Q_j は必ずしも力の次元を持たないことに注意。

§ 5 Newtonの運動方程式からLagrangeの運動方程式への変形

N 質点系で力は保存力以外のものもあって良いとする。(摩擦力など)

Newtonの運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{F}_a \quad (a = 1, 2, \dots, N)$$

である。一般化座標を用いて直交座標の各成分を表し

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_a(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t)$$

今、運動方程式を満たす $\mathbf{x}_a$ から微小にずれた点 $\mathbf{x}_a + \delta\mathbf{x}_a$ を考える。

↑
無限小：仮想変位

$\delta\mathbf{x}_a$ を用いると運動方程式は

$$\sum_a m_a \ddot{\mathbf{x}}_a \delta\mathbf{x}_a = \sum_a \mathbf{F}_a \delta\mathbf{x}_a$$

とまとめられる。

この式は任意の無限小ベクトル $\delta\mathbf{x}_a (a = 1, 2, \dots, N)$ に対して成立しているの
で $m\ddot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{F}_a$ と同等。これを一般化座標の δq_i と Q_j を用いて書くとどのような形になるだろうか。

上のNewtonの運動方程式を変数 $q_i (i = 1, 2, \dots, 3N)$ についての運動方程式に変換する。 $\delta\mathbf{x}_a$ は $q_i \rightarrow q_i + \delta q_i$ によってもたらされるが、それは次のような式で表される。(ただし、 $\delta q_i (i = 1, 2, \dots, 3N)$ は任意の無限小量)

$$\delta\mathbf{x}_a = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\{F(x + \delta x, y + \delta y) = F(x, y) + \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y \text{ の関係に注意}\}$$

これより $\sum_a m_a \ddot{\mathbf{x}}_a \delta\mathbf{x}_a = \sum_a \mathbf{F}_a \delta\mathbf{x}_a$ は

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(\sum_a m_a \ddot{\mathbf{x}}_a \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{3N} \left(\sum_a \mathbf{F}_a \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} \right) \delta q_i \dots\dots\dots (1)$$

と変形される。ただし、 $\delta q_i (i = 1, 2, \dots, 3N)$ は任意の無限小量

まず、(1)式の左辺の変形を試みる。左辺の括弧の中身は

$$\sum_a m_a \ddot{\mathbf{x}}_a \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} = \sum_a m_a \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{x}}_a \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} \right) - \dot{\mathbf{x}}_a \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} \right) \right] \dots\dots\dots (2)$$

一方、 $\dot{\mathbf{x}}_a = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial t}$ であり、この両辺を $\dot{q}_i$ で偏微分すると

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} \dots\dots\dots (3)$$

また q_i で偏微分すると (ヒント： $F(q,t) \rightarrow \frac{d}{dt} F = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t}$)

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial^2 \mathbf{x}_a}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_a}{\partial t \partial q_i}$$

この右辺は $\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial^2 \mathbf{x}_a}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_a}{\partial t \partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} \right)$ であることに注意すると結局、

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} \right) \dots\dots\dots (4)$$

(3),(4)を(2)に用いると

$$\sum_a m_a \ddot{\mathbf{x}}_a \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} = \sum_a m_a \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{x}}_a \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} \right) - \dot{\mathbf{x}}_a \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a}{\partial q_i} \right]$$

と変形される。

ここで、全運動エネルギーは $T = \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\mathbf{x}}_a^2$ であるから

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_a m_a \left(\dot{\mathbf{x}}_a \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_a m_a \dot{\mathbf{x}}_a \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a}{\partial q_i}$$

の関係がある。従って、

$$\sum_a m_a \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{x}}_a \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{\mathbf{x}}_a \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a}{\partial q_i} \right] = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

である。結局、

$$\sum_a m_a \ddot{\mathbf{x}}_a \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

と変形された。

次に(1)式右辺を見てみると、一般化力の定義が $Q_i \equiv \sum_a \mathbf{F}_a \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i}$ だから
結局

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(\sum_a \mathbf{F}_a \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{3N} Q_i \delta q_i$$

この式の右辺は一般化座標の仮想変位 δq_i のもとでの仮想仕事。以上より
(1)式は

$$\sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i = \sum_{i=1}^{3N} Q_i \delta q_i$$

と変形された。 δq_i は任意の無限小だから、結局、一般化座標での運動方程式は

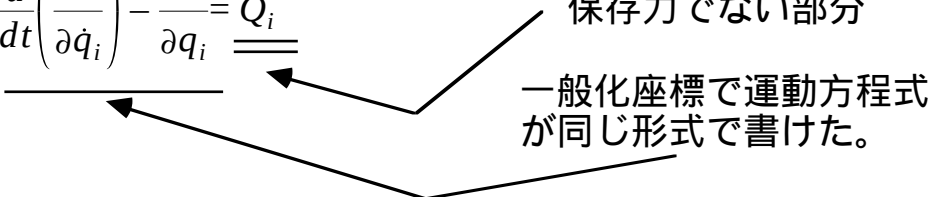
$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, 3N) \quad \dots\dots\dots(5)$$

となる。

ここで、 Q_i を保存力とそうでない部分とに分けると

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i' \quad (Q_i' \text{は束縛力や摩擦力})$$

$L = T - V$ とすると(5)式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \underline{\underline{Q_i'}}$$


保存力でない部分

一般化座標で運動方程式
が同じ形式で書けた。

となった。これでNewtonの運動方程式が一般化座標での運動方程式に変形された。