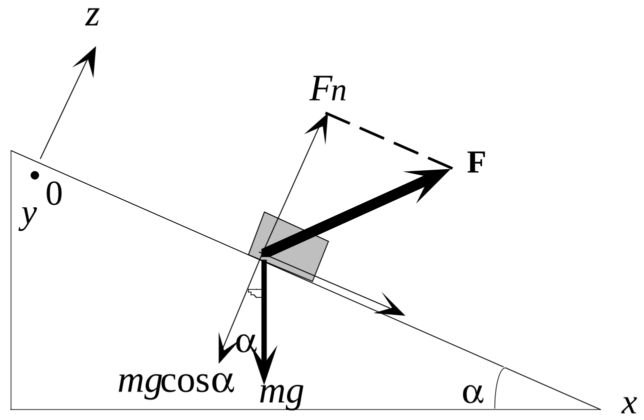
II　束縛条件のある場合

§１　束縛条件と一般化座標

☆「斜面を滑る」場合



与えられた条件は　$z(t)=0$
垂直抗力 Fn は$z(t)=0$を保つように現れる。

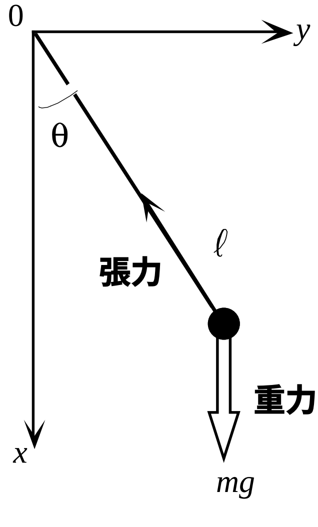
$z(t)=0$　つまり
$\dot{z}(t)=0$、$\ddot{z}(t)=0$
物体に働く力のz成分（の和）=0
これを満たすようにFnが現れる。

与えられるのはFnではなく、$z(t)=0$という束縛条件。

⇩

運動の自由度はx,y,z（３個）⇨ x,y（２個）

☆「単振り子」の場合



張力がおもりを半径ℓの球面上に保つ。
（正確には球内に束縛、糸はたるむこともある。）

おもりの運動を１つの鉛直面内に限るとした場合、与えられるのは張力ではなく
$x^2+y^2\leq\ell^2$という束縛条件。
（たるまない場合$x^2+y^2=\ell^2$）

自由度は減るが、座標はどうすればよい？
r, θ で表すと便利。

$r=\ell,\ \dot{r}=0,\ \ddot{r}=0$、rは変数ではなくなる。
θのみが一般化座標。自由度は１になる。

ホロノミックな束縛

　質点の座標の間に一定の関係式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$$
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)=0$$

例、剛体．．．多数の質点からなる系、構成する質点間の距離を一定に保つ。

$$(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)^2-\ell_{ij}^2=0$$

（$x^2+y^2\leq\ell^2$は非ホロノミック束縛の例。）

ホロノミックな束縛によって一定になる変数を含む一般化座標で記述し、その一定な量を座標から除くと問題が扱いやすくなる。

例えばN個の質点からなる自由度3Nの場合は以下の様に扱えばよい。

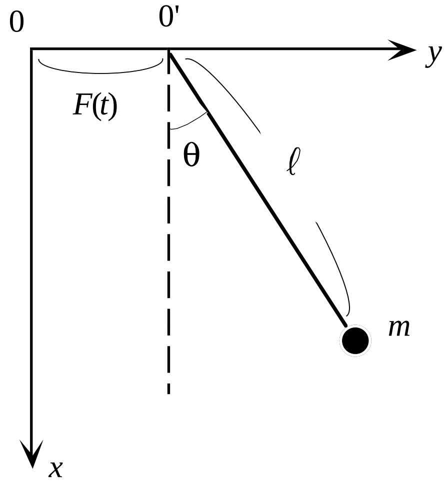
ホロノミックな束縛条件がk個なら自由度は$3N$-k、従って一般化座標は

$$q_1,q_2,\cdots,q_{3N-k}$$

残った自由度の運動方程式の中にはホロノミックな束縛条件は出てこない。
Lagrangeの方程式で束縛に抵触しない自由度を表す一般化座標
$q_1,q_2,\cdots,q_{3N-k}$のみを扱えばよく、束縛力のことは考えなくて良い。

　まずはこのことが成り立つことを認めて、（束縛力のある場合の運動方程式の変形を一般に行う前に）例題を考えよう。

例題　　時間に依存する束縛条件



x, y座標系では

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2 \qquad U=-mgx$$

$$\therefore L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2+mgx$$

$$x=\ell\cos\theta\ ,\quad y=\ell\sin\theta+F(t)$$

∴束縛条件は $x^2+\left\{y-F(t)\right\}^2-\ell^2=0$

極座標系への変数変換

$$\dot{x}=-\ell\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{y}=\ell\dot{\theta}\cos\theta+F'(t)$$

これよりLagrangian**は**

$$L=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2+m\ell\dot{\theta}F'(t)\cos\theta+\frac{1}{2}m\left\{F'(t)\right\}^2+mg\ell\cos\theta$$

従って、

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m\ell^2\dot{\theta}+m\ell F'(t)\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=m\ell^2\ddot{\theta}+m\ell F''(t)\cos\theta-m\ell F'(t)\dot{\theta}\sin\theta$$

また、

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-m\ell\dot{\theta}F'(t)\sin\theta-mg\ell\sin\theta$$

以上より、Euler-Lagrange**の運動方程式は**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=m\ell^2\ddot{\theta}+m\ell F''(t)\cos\theta+mg\ell\sin\theta=0$$

すなわち、運動方程式はθに対する $\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\sin\theta=-\frac{1}{\ell}F''\cos\theta$ **だけとなる。**

$\sin\theta\simeq\theta \quad \cos\theta\simeq1 \quad F(t)=A\cos\omega t$ **のとき**

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=\frac{A\omega^2}{\ell}\cos\omega t$$ ⇦ **強制振動**

§２　束縛力がある場合のNewton運動方程式からLagrange運動方程式への変形

質点に束縛力$\mathbf{C}_a$が働いている場合のNewtonの運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{F}_a + \mathbf{C}_a \quad (a = 1,2,...N)$$

束縛条件$g_\ell(\mathbf{x},t) = 0 \quad (\ell = 1,2,...k)$ があるとする。この段階ではC_aは束縛条件の結果現れた未知の量。独立な変数は　$n = 3N - k$

n個の独立変数$q_1,q_2....q_n$ を選び、$\mathbf{x}_a$との関係を

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_a(q_1,q_2....q_n,t) \quad (a = 1,2,...N)$$

と書く。この$\mathbf{x}_a$は$g_\ell(\mathbf{x},t) = 0$を自動的に満たすように作られており、束縛条件の変わりに用いるもの。つまり$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_a(q_1,q_2....q_n,t)$　からqを消去したものが$g_\ell(\mathbf{x},t) = 0$

束縛が滑らかな場合、束縛力による仕事は０、つまり

$$\sum_a \mathbf{C}_a \delta\mathbf{x}_a = 0$$

従って、

$$\sum_a m\ddot{\mathbf{x}}\delta\mathbf{x}_a = \sum_a \left[\mathbf{F}_a + \mathbf{C}_a\right]\delta\mathbf{x}_a = \sum_a \mathbf{F}_a\delta\mathbf{x}_a$$

ただし、$\delta\mathbf{x}_a$は独立には取れないので上式は$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_a$ を意味するのではない。

独立な仮想変位は$\delta q_1,\delta q_2....\delta q_n$の$n$個

$$\delta\mathbf{x}_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\mathbf{x}_a}{\partial q_i}\delta q_i \qquad (a = 1,2,...N)$$

i は1〜$3N$ではなく1〜nである点に注意。

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_a m_a\ddot{\mathbf{x}}_a\frac{\partial\mathbf{x}_a}{\partial q_i}\right)\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_a \mathbf{F}_a\frac{\partial\mathbf{x}_a}{\partial q_i}\right)\delta q_i$$

（1〜$3N$が1〜nになっている。）

従って、I章§５の拘束力を考えなかったときのNewton運動方程式からLagrange運動方程式への変形の場合と全く同様の議論ができて、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=F_i \quad (i=1,2,...n)$$

F_i は$\mathbf{F}_a$から来ている。（$\mathbf{C}_a$の寄与はない）
束縛力以外が保存力なら

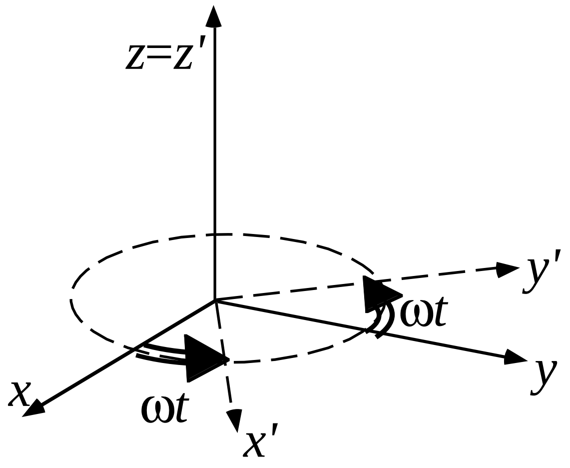
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,2,...n)$$

これを解いてq_iが求まれば、$\mathbf{x}_a=\mathbf{x}_a(q_1,q_2....q_n,t)$より$\mathbf{x}_a$が決定され、これを$m\ddot{\mathbf{x}}_a=\mathbf{F}_a+\mathbf{C}_a$に代入して$\mathbf{C}_a$が決定される。

以上のやり方は束縛条件を解いて適当な独立成分を選ぶと言う作業が容易な場合に使える。つまり$\mathbf{x}_a=\mathbf{x}_a(q_1,q_2....q_n,t)$が簡単に見つかる場合。
そうでない場合は一般にはLagrangeの未定係数法を使う。（「III　変分原理」参照）

練習問題

問題１．直交直線座標系x,y,z**から、この座標と**$t=0$**で一致していて**z**軸の周りで角速度**ω**で回転している座標系**x',y',z'**（非慣性系）への変換を考える。これらの座標系の間には**



$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t$$
$$y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t$$
$$z = z'$$

のような関係が成り立つ。もとの座標でのLagrangianを回転座標系のものへ変換せよ。また、Euler-Lagrangeの運動方程式より、回転座標系での運動方程式を導き、もとの座標系でのそれとの違いを議論せよ。

問題２．電荷eをもった粒子が強さEの電場、磁束密度Bの磁場中を速度vで運動するときローレンツ力

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

を受けることが知られている。Bがz方向の一様磁場

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = B$$

であれば、$(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x = \dot{y}B,\ (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_y = -\dot{x}B$ **であるから、電場のポテンシャルを**Φ**として**$(\mathbf{E} = -\nabla\Phi)$**、荷電粒子の運動方程式は**

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -e\frac{\partial \Phi}{\partial x} + eB\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -e\frac{\partial \Phi}{\partial y} - eB\dot{x} \\ m\ddot{z} &= -e\frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned} \tag{3}$$

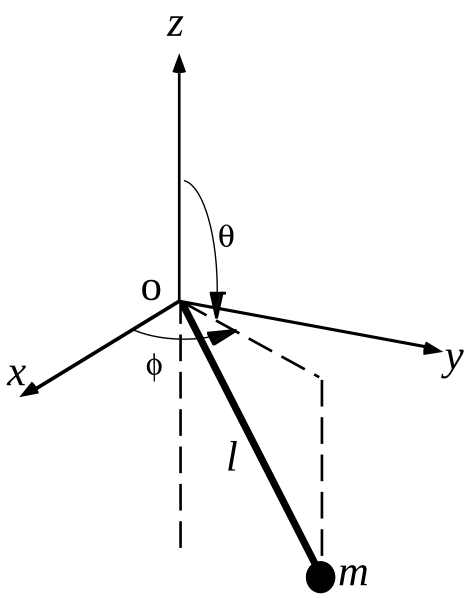
となる。この運動方程式を導くLagrangianは

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{eB}{2}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) - e\Phi \tag{4}$$

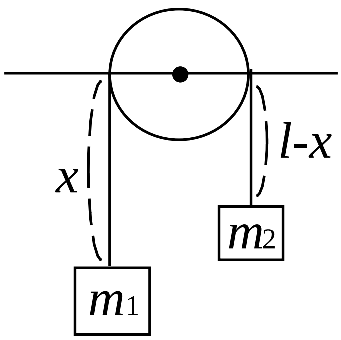
であることを、実際に上の運動方程式を導くことによって確かめよ。

解答

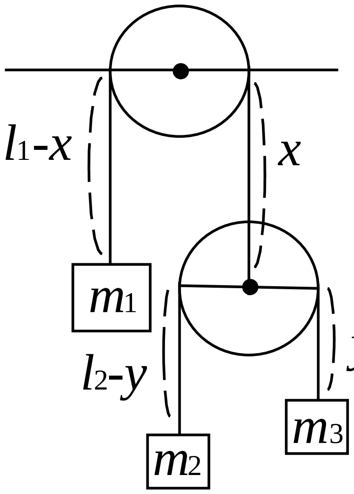
問題３．重さのない剛体の棒（長さl）で吊された質点（球面振り子）に対するEuler-Langrangeの運動方程式を求めよ。



問題４．図のように質量の無視できる定滑車にかけた糸の一端に質量m_1の物体、他端にm_2の物体を吊す。図の様に糸の長さxを定めたとき、xが満たす運動方程式を求めよ。



問題５．問題４と同様な定滑車を用いて図のように質量m_1、m_2、m_3の質量を吊した。図のようにx,yを定めたとき、これらが満たす運動方程式を導け。



問題６． 軸が鉛直で頂点が下を向いている滑らかな円錐面（頂角２α）の内側に沿って滑っている質点の

(a) 運動方程式を求めよ。
(b) 質点が一定の高さで水平な円周上を回るための条件は。
(c) 定常運動している質点にr方向の微小な撃力を加えてから後の運動は？