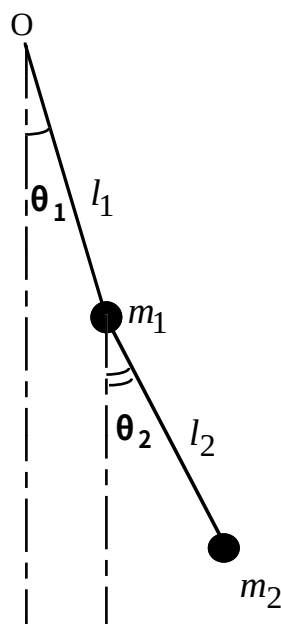


III 力学系の微小振動

§ 1 2重振り子

図のような2重の振り子をひとつの鉛直面内で小さく振動させる。



一般化座標は θ_1, θ_2

角が小さい場合のみ考え、

$$\begin{cases} \sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \theta \\ \cos \theta \simeq 1 \end{cases} \quad \text{とする。}$$

おもり運動は水平方向だけ考えることになる。

おもりの運動エネルギーは

$$T = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2$$

ポテンシャルエネルギーは $\theta_1 = \theta_2 = 0$ のときを基準にすると

$$U = m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g \{ l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2) \}$$

$\cos \theta_i = 1$ にすると $U \equiv 0$ となってしまう振り子を動かす力がなくなってしまう。

→ 展開の2次まで取る必要あり。 $1 - \cos \theta_i \simeq \frac{1}{2} \theta_i^2$ とするとポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} m_1 g l_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g (l_1 \theta_1^2 + l_2 \theta_2^2) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2^2 \end{aligned}$$

以上よりLagrangianは

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2^2$$

運動方程式 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i=1,2)$ を作ると、

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 = -(m_1 + m_2)g\theta_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 = -g\theta_2 \end{cases}$$

以下、簡単のため $m_1=m_2, l_1=l_2=l$ の場合を考える。

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -2\gamma\theta_1 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -\gamma\theta_2 \end{cases} \quad \left(\gamma = \frac{g}{l}\right)$$

第1式に第2式の λ 倍を加えると、

$$\frac{d^2}{dt^2}\{(2+\lambda)\theta_1 + (1+\lambda)\theta_2\} = -\gamma(2\theta_1 + \lambda\theta_2)$$

{ }内と()内が比例するように λ を決めると

$$\frac{(2+\lambda)}{(1+\lambda)} = \frac{2}{\lambda} \quad \text{より} \quad \lambda = \pm\sqrt{2}$$

これを上式に代入して

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sqrt{2}\theta_1 \pm \theta_2) = -(2 \pm \sqrt{2})\gamma(\sqrt{2}\theta_1 \pm \theta_2)$$

となる。 $\omega_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\gamma}$ $\omega_2 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\gamma}$ とおくと

$$\sqrt{2}\theta_1 + \theta_2 = A \cos(\omega_1 t + \alpha)$$

A, B, α, β は積分定数

$$\sqrt{2}\theta_1 - \theta_2 = B \cos(\omega_2 t + \beta)$$

上式から
$$\begin{bmatrix} \theta_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\{A \cos(\omega_1 t + \alpha) + B \cos(\omega_2 t + \beta)\} \\ \theta_2 = \frac{1}{2}\{A \cos(\omega_1 t + \alpha) - B \cos(\omega_2 t + \beta)\} \end{bmatrix} \quad \text{が得られる。}$$

A, B, α, β は初期条件から決まる。

初期条件によっては ω_1 だけの振動や、 ω_2 だけの振動になり得る。
 (θ_1, θ_2 の振幅比を $1:\sqrt{2}$ や $1:-\sqrt{2}$ にした場合。)

新しい座標 $Q_1 = \sqrt{2}\theta_1 + \theta_2, Q_2 = \sqrt{2}\theta_1 - \theta_2$ に変換すると

$$\ddot{Q}_1 = -\omega_1^2 Q_1, \quad \ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2 \quad \text{が得られる。}$$

実際、 $\theta_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2), \theta_2 = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2)$ となるので、 $m_1=m_2, \quad l_1=l_2=l$ とした
 Lagrangian、

$$L = \frac{ml^2}{2}(2\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{mgl}{2}(2\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

に代入すると、

$$L = \frac{ml^2}{8}\{(2 + \sqrt{2})\dot{Q}_1^2 + (2 - \sqrt{2})\dot{Q}_2^2\} - \frac{mgl}{4}(Q_1^2 + Q_2^2)$$

で、 Q_1 の式と Q_2 の式に分離できる。

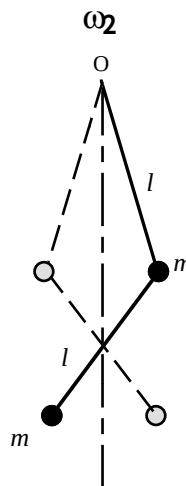
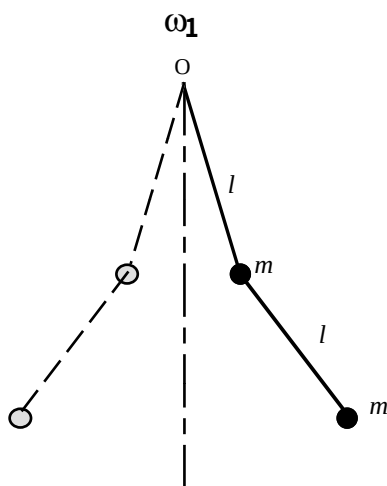
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{は}$$

$$\ddot{Q}_1 = -(2 - \sqrt{2})\frac{g}{l}Q_1$$

$$\ddot{Q}_2 = -(2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}Q_2$$

となる。

元の座標の特別な組み合わせとして角振動数 ω_1, ω_2 の調和振動が起こる。



これを基準振動(normal mode)と呼ぶ。

Q_1, Q_2 は基準座標

Lagrangianの中に θ_1, θ_2 の交差項 $\theta_1\theta_2, \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$ が出てこなければ θ_1, θ_2 は独立な2つの単振動になる。運動エネルギー T に現れる $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$ 、ポテンシャルエネルギー U に現れる $\theta_1\theta_2$ などの交差項を $\theta_1, \theta_2 \rightarrow Q_1, Q_2$ の変換により消してしまえば基準振動が得られる。では、もっと一般の場合にはどうすれば良いのか？ → 次節以降。

§ 2 平衡点近傍でのLagrangian

力学系の振動 → 平衡点から少し変位させたとき復元力が働くことと、慣性の存在によって反対側へ変位してしまうことにより生じる。ではそれはどのような式で表されるか？

自由度 f の系を考える。一般化座標を $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_f\}$ とする。この系は t を直接には含まないLagrangian、 $L=T - U$ によって記述され、 U は $q_1, q_2, q_3, \dots, q_f$ のみの関数とする。

$$T = T(q, \dot{q}), \quad U = U(q)$$

運動エネルギーは $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots = \dot{q}_f = 0$ のときのみ0になるとする。（座標系が静止していることに対応。） T は $\dot{q}_i$ の1次は含まない2次の同次式となる。

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} K_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \text{ただし、} K_{ij} = K_{ji} \text{とする。}$$

(K_{ij} は一般に q の関数。)

Lagrangeの運動方程式から静止状態の解を求める。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

静止状態であるから $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots = \dot{q}_f = 0$ 、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \text{は} \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_f \text{の一次式、}$$

(上の T の具体的表式を見れば分かる。)

従って $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots = \dot{q}_f = 0$ を入れると $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$ 、

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f)$$

これより平衡位置 $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)}, \dots, q_f^{(0)}$ が分かる。この位置を新しい原点とすると、平衡位置付近の運動のみ考えるなら U を変位によって展開できる。

$$U = U_0 + \sum_i b_i q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} q_i q_j$$

K_{ij} も展開できるが、もともと小さい量の2次、すなわち $\dot{q}_i \dot{q}_j$ がかかっているの
で展開の0次だけ取っておけば十分。従って K_{ij} を q によらない定数とする。

そうすると、 $\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$ であるから、 $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ であることを考えると

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right)_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 = 0$$

となることが分かる。

平衡点での値を取るという意味

$b_i = \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0$ であるから、 U の原点を U_0 に取ると、結局

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} q_i q_j$$

となる。

平衡位置からずれた時、必ず元へ戻る力が働くためには平衡位置での U が極小
値を取らなければならない。つまり U は正值2次形式でなければならない。（
 $q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_f = 0$ 以外では必ず正の値を取る。）

運動エネルギーは定義から $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_f$ の正值2次形式。つまり我々の扱う系の
Lagrangianは

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} K_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} q_i q_j$$

のように2つの正值2次形式で表されることが分かった。