# 平成 30 年度　解析力学　問題集

【1】互いにポテンシャル$V(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$で相互作用する、質量が$m_1,m_2$の２質点の運動を考える。ただし、$\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$は２質点それぞれの位置ベクトルである。

(a) Newtonの運動方程式を書け。
(b) 重心座標、相対座標への変数変換

$$\mathbf{X}=\frac{m_1\mathbf{x}_1+m_2\mathbf{x}_2}{m_1+m_2}、\mathbf{x}=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$$

を行い、この変数でのNewtonの運動方程式を導け。
(c) Newtonの運動方程式が、Lagrangian

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{x}}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{x}}_2^2-V(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$$

から、Euler–Lagrangeの方程式として導かれることを確かめよ。
(d) 重心座標$\mathbf{X}=\dfrac{m_1\mathbf{x}_1+m_2\mathbf{x}_2}{m_1+m_2}$と相対座標$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$を用いて$L$を表し、循環座標を指摘せよ。
(e) 重心座標、相対座標でEuler–Lagrangeの方程式を作り、どの様な量が保存するかを述べよ。

【2】Euler–Lagrange方程式とNewtonの運動方程式が等価であることをデカルト座標の場合で示せ。すなわち

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0$$

が$m\dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=-\nabla V(\mathbf{x})$と同じものであることを示せ。ただし$L$はLagrangianである。

【3】$z$方向だけに依存するポテンシャル中を動く１質点を考える。Lagrangianを

$$L=\frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2-V(z)$$

としてEuler–Lagrangeの運動方程式を書き、循環座標と保存量を指摘せよ。

【4】原点からの距離$r$のみの関数であるポテンシャル中を運動する１質点を考える。Lagrangianを$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - V(r)$ としてEuler-Lagrangeの運動方程式を作り、どの様な量が保存するかを述べよ。

【5】平面極座標における速度、及び加速度の表式を求めよ。またNewtonの運動方程式を平面極座標で表せ。

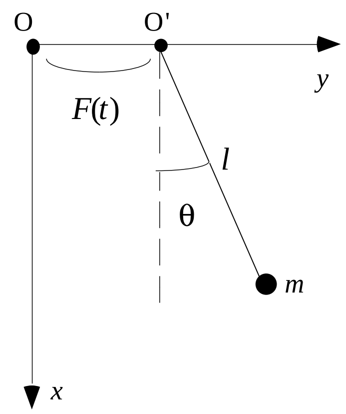
【6】直交座標$x_1,x_2,x_3.........,x_n$と一般化座標$q_1,q_2,q_3.........,q_n$が次のような関係にあるとする。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(q_1,q_2,.......q_n) \\
x_2 &= x_2(q_1,q_2,.......q_n) \\
&\vdots \\
x_n &= x_n(q_1,q_2,.......q_n)
\end{aligned}
$$

直交座標系での微小変位による仕事はこの座標系での力$F_i$によって$\delta W = \sum_{i=1}^{n} F_i dx_i$と書け、また一般化座標での微小変位による仕事は一般化力$Q_i$　によって$\delta W = \sum_{i=1}^{n} Q_i dq_i$と書ける。このことから$Q_i$と$F_i$の関係式を導け。

【7】【6】で書いた関係式に従い、球面極座標系$r, \theta, \phi$に対する一般化力を書き下せ。また中心力の場合はどうか。

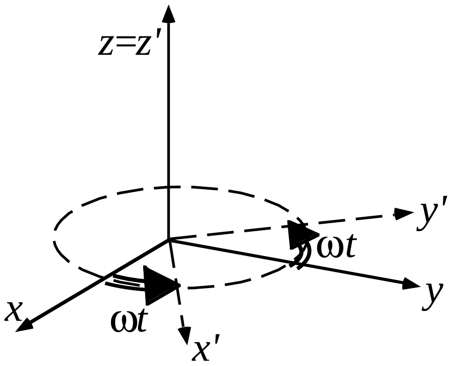
【8】図のように長さ$l$の伸びない糸と質量$m$の質点からなる単振り子の支点O'が$F(t)$に従って水平方向に運動している場合を考える。




(a)束縛条件を書き、束縛力が現れない変数を選んでLagrangianを作れ。

(b)運動方程式を導き、傾角が小さく$(\sin\theta \fallingdotseq \theta, \cos\theta \fallingdotseq 1)$支点O'の運動が単振動$F(t) = A\cos\omega t$である場合に振り子がどのような運動をするか述べよ。

【９】直交直線座標系$x,y,z$から、この座標と$t=0$で一致していて$z$軸の周りで角速度ｗで回転している座標系$x',y',z'$（非慣性系）への変換を考える。これらの座標系の間には




$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t$$
$$y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t$$
$$z = z'$$

のような関係が成り立つ。もとの座標でのLagrangianを回転座標系のものへ変換せよ。また、Euler-Lagrangeの運動方程式より、回転座標系での運動方程式を導き、もとの座標系でのそれとの違いを議論せよ。

【１０】電荷$e$をもった粒子が強さ$\mathbf{E}$の電場、磁束密度$\mathbf{B}$の磁場中を速度$\mathbf{v}$で運動するときローレンツ力

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

を受けることが知られている。$\mathbf{B}$が$z$方向の一様磁場

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = B$$

であれば、$(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_x = \dot{y}B$, $(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_y = -\dot{x}B$であるから、電場のポテンシャルを$\Phi$として$(\mathbf{E} = -\nabla\Phi)$、荷電粒子の運動方程式は

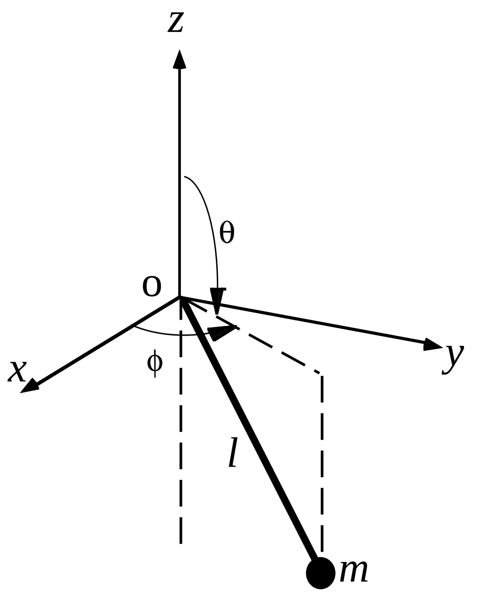
$$m\ddot{x} = -e\frac{\partial\Phi}{\partial x} + eB\dot{y}$$
$$m\ddot{y} = -e\frac{\partial\Phi}{\partial y} - eB\dot{x}$$
$$m\ddot{z} = -e\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

となる。この運動方程式を導くLagrangianは

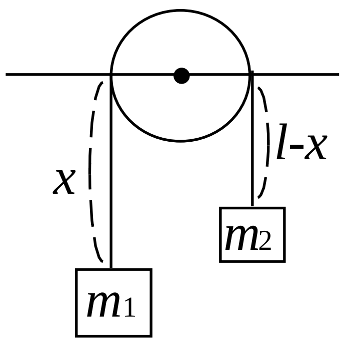
$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{eB}{2}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) - e\Phi$$

であることを、実際に上の運動方程式を導くことによって確かめよ。

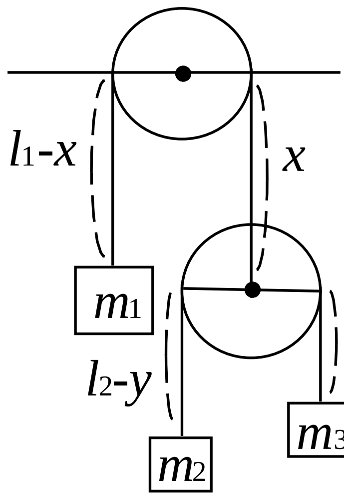
【１１】重さのない剛体の棒（長さ$l$）で吊された質点（球面振り子）に対するEuler−Langrangeの運動方程式を求めよ。




【１２】図のように質量の無視できる定滑車にかけた糸の一端に質量$m_1$の物体を、他端に$m_2$の物体を吊す。図の様に糸の長さ$x$を定めたとき、$x$が満たす運動方程式を求めよ。

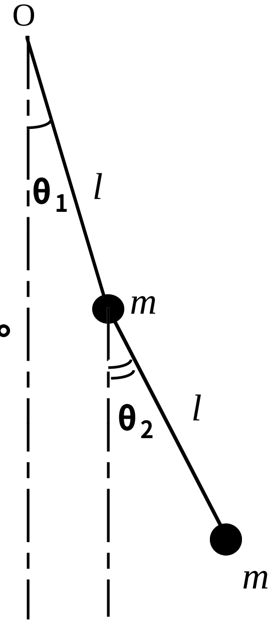



【１３】【１２】と同様な定滑車を用いて図のように質量$m_1$、$m_2$、$m_3$の物体を吊した。図のように$x,y$を定めたとき、これらが満たす運動方程式を導け。

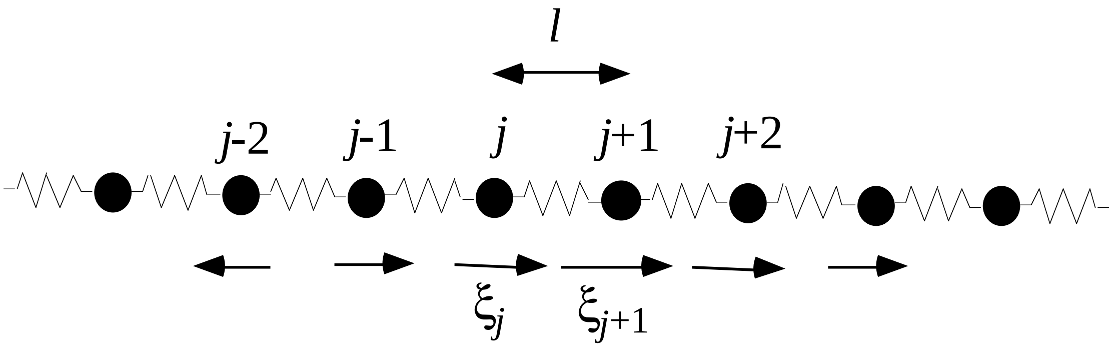


【１４】図のように長さ$l$の伸びない糸と質量$m$の二つの質点からなる２重振り子を考える。以下の問いに答えよ。

(a)揺れ角が小さいときのみを考え、束縛力の現れない座標を選んでLagrangianを 書け。
（運動エネルギーは$\sin\theta_i \simeq \theta_i,\ \cos\theta_i \simeq 1$として、
ポテンシャルエネルギーは $1-\cos\theta_i \simeq \frac{1}{2}\theta_i^2$
として求めよ。ただし$i=1,2$）
(b) 運動方程式を導け。
(c) $\theta_i = A_i \cos(\omega t + \alpha)$の形を仮定して(b)で得た方程式に代入し$A_i$と固有角振動数を決める式を行列表現せよ。
(d) 固有角振動数を求めよ。
(e) $A_i$の比を決めて基準座標を求め、その運動を記述せよ。




【１５】下図のモデルで表したような格子振動を考える。




おもりの質量$m$、バネの弾性定数$k$、バネの長さを$l$とする。運動エネルギーは$T=\sum_j \frac{1}{2}m\dot{\xi}_j^{\,2}$、ポテンシャルエネルギーは$U=\sum_j \frac{1}{2}k\left(\xi_{j+1}-\xi_j\right)^2$と表すことができる。

(a) Lagrangian及び、Euler-Langrangeの運動方程式を書け。

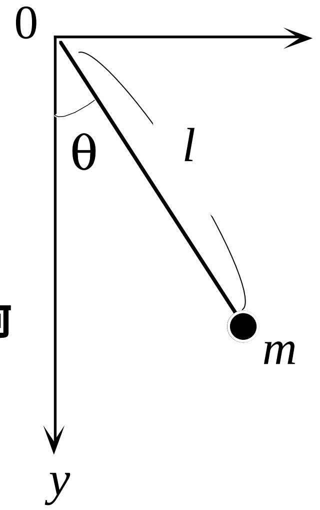
(b)$\xi_j(t) = A_j^{(n)} a_n \cos\left(\omega_n t + \alpha_n\right) = A_j^{(n)} Q_n(t)$（ただし$A_j^{(n)}=C_n \sin(j\eta_n)$と取る。また$C_n$は規格化定数。）の形を仮定して基準振動を求めよ。ただし$\eta_n$は両端が固定されているとする境界条件から決めよ。

【１６】$L(q_1,q_2,\cdots q_f,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots \dot{q}_f,t)$を自由度 $f$ の系のLagrangianであるとする。

$$\delta\int_a^b L(q_1,q_2,\cdots q_f,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots \dot{q}_f,t)dt = 0$$

という変分問題に対するEulerの方程式（Euler−Lagrangeの方程式）を導け。

【１７】図のように長さ $l$ の伸びない糸と質量 $m$ の質点からなる振り子が $x^2+y^2=l^2$ の束縛条件の下で運動している。




(a)束縛力が現れない変数を選んでEuler−Lagrangeの式を作り、$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ としてそれを解け。
(b)$xy$-座標系でLagrangianを作り、未定係数法により $x,y,l$（未定係数）の連立の運動方程式を立てよ。
(c)(b)で得た方程式の $l$ を含む項の物理的意味は何かを述べよ。
(d) $l$ を消去して $x, y$ のみの方程式をつくり、$xy$-座標系から平面極座標系への変換式を用いて、これが(a)で得た方程式と同じものになることを確かめよ。

【１８】自由度 $f$ の系のLagrangian、$L = L(q_1,q_2,\cdots q_f,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots \dot{q}_f,t)$が与えられているとする。

(a) 一般化運動量 $p_i$ の定義を書け。
(b) 一般化運動量 $p_i$ とLagrangianを用いてHamiltonian, $H(q,p,t)$の定義を書け。
(c) $H(q,p,t)$を用いてHamiltonの正準方程式を書け。

【１９】 中心力場で１質点が運動する系のLagrangianは球面座標で

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - V(r)$$

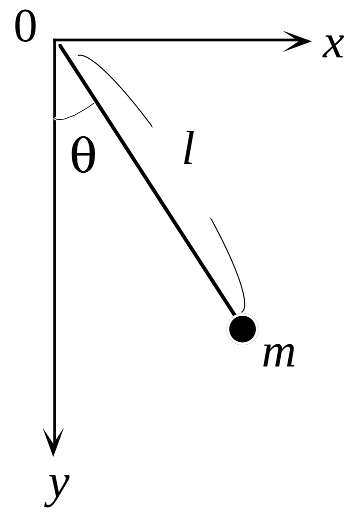
で与えられる。

(a) $r, \theta, \phi$ に共役な運動量（一般化運動量）を求めよ。
(b) 一般化運動量を用いてHamiltonianを作れ。
(c) Hamiltonの正準方程式を書き下せ。

【２０】質量$m$の１次元の調和振動子を考える。

(a)Lagrangianを書け。
(b)定義より、一般化運動量、Hamiltonianを導け。
(c)正準方程式を作り、Newtonの運動方程式と等価であることを確かめよ。

【２１】図のように長さ$l$の糸の端に質量$m$の質点をつけた単振り子に対するHamiltonianを求め、正準方程式がNewtonの運動方程式と同じものになることを確かめよ。




【２２】質量$m$、電荷$e$の質点に、電場$\mathbf{E}$と磁場$\mathbf{H}$が働いている時の運動方程式

$$m\ddot{x} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right)$$

を正準方程式として与えるようなHamiltonianは

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + eA_0$$

であることを示せ。ただし$\mathbf{A}$、$A_0$はそれぞれ、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルである。

【２３】質量１、角振動数１、自由度 １の調和振動子を考える。

(a) Lagrangianを座標$q$と$\dot{q}$の関数として与え、定義に従ってHamiltonian、$H(q,p)$を導け。また位相空間内で代表点が等角速度で回転することを示せ。
(b) $Q = Q(q,p)$ 、$P = P(q,p)$なる正準変換を考える。変換の母関数が

$$W = \frac{1}{2}q^2 \cot Q$$

で与えられているときの変換の具体的な形を導け。（Poincaré変換）
(c)(b)の変換を上の調和振動子に適用し、新しい座標系でのHamiltonianと正準方程式を書け。またこの座標系における位相空間での運動を調べよ。

【２４】以下の問いに答えよ。

(a)正準変換とはどのような変換かを述べよ。
(b)無限小の空間推進の母関数は運動量であることを示せ。
(c)無限小の時間推進の母関数はHamiltonianであることを示せ。
(d)無限小の回転の母関数は角運動量であることを２次元の場合で示せ。
(e)自由度$f$の系における二つの力学変数$A,B$に対しPoisson括弧式の定義を書け。
(f)自由度$f$の系における一般化座標、一般化運動量$\{q_i, p_i\}$について Poisson括弧 $[p_i, p_j]$、$[q_i, q_j]$、$[p_i, q_j]$を計算せよ。
(g)Hamiltonの正準方程式をPoisson括弧式を用いて書き、それが【１８】(c)の解答と同じものであることを示せ。

【２５】自由度 $f$ の系に対して無限小変換$Q_i \equiv q_i + \delta q_i$、$P_i \equiv p_i + \delta p_i$を考える。無限小変換の母関数は無限小のパラメーターεと変換の種類によって決まる$\{q,p\}$の関数$G(q,p)$によって

$$W' = \sum_i P_i\, q_i + \varepsilon G(q,p)$$

の様に表される。

(a)$\{q,p\} \to \{Q,P\}$の変換の形を与え、$\delta q_i$、$\delta p_i$をεと$G(q,p)$によって表せ。（高次の無限小は無視すればよい。）
(b)任意の関数$F(q,p)$と、これに無限小だけ異なる正準変数$\{Q,P\}$を代入した$F(Q,P)$を考える。これらの関数の差を$F$と$G$のPoisson括弧式を用いて表せ。
(c)(b)の$F$がHamiltonianであるとき、(b)で求めた式はどのような物理的意味を持つかを 述べよ。

【２６】$\begin{aligned} q_i &= q_i(Q_1,Q_2,.....Q_f, P_1,P_2,.....P_f) \\ p_i &= p_i(Q_1,Q_2,.....Q_f, P_1,P_2,.....P_f) \end{aligned}$ の形の変換で正準変数$\{q, p\}, \{Q, P\}$が結ばれているとき、Poisson括弧式は不変、すなわち

$$[A, B] = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right) = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial Q_k}\frac{\partial B}{\partial P_k} - \frac{\partial A}{\partial P_k}\frac{\partial B}{\partial Q_k}\right)$$

が成立することを無限小変換の場合に証明せよ。

【２７】Hamiltonianが$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \mathrm{V}(r)$で表される、中心力場内を運動する質点の角運動量を考える。$x$軸方向の角運動量$l_x = yp_z - zp_y$の時間変化を$\frac{dF}{dt} = [F, H]$の関係を用いて調べよ。ただし$F$は任意の力学変数である。