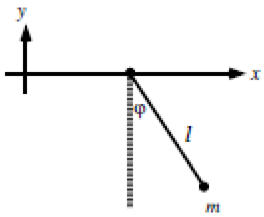
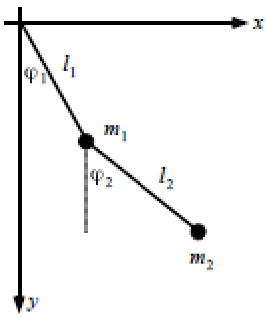
[1] 図に示されているような xy 平面内の単振子のラグランジアンを求めなさい。ただし振子の支点は水平方向に $a \cos \gamma t$ で振動している。



[2] 図に示されているような xy 平面内の二重振子のラグランジアンを求めなさい。

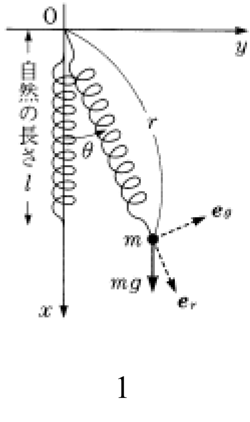


[3] 次のラグランジアンから求まる運動方程式を比べることにより、ラグランジアンは一意的ではないことを示し、その運動方程式がどんな運動を表しているか述べなさい。

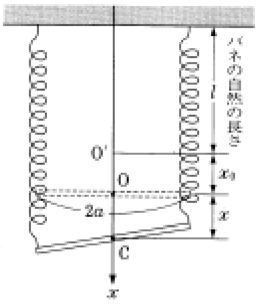
(a) $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ と$L = e^{\sqrt{m}\dot{x}}$

(b) $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$に摩擦力$-\lambda\dot{x}$が作用する場合と$L = (\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2)e^{(\lambda/m)t}$

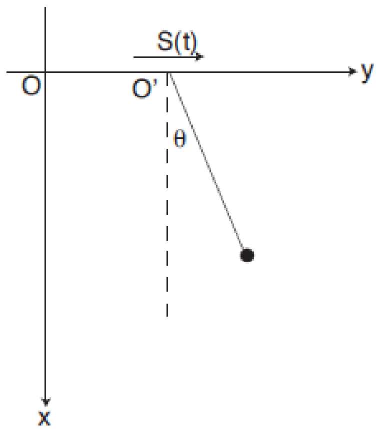
[4] 図に示されている様な自然の長さ l、ばね定数 k の軽いばねに質量 m の質点を吊るすとき、質点の鉛直面内の振動運動を考える。ラグランジアンと運動方程式を求めなさい。



[5] 図に示されている様な同じ長さ l、ばね定数 k の２本のばねに質量 m、長さ $2a$ の一様な棒をつるす。棒の重心 C の周りの慣性モーメントを I とする。棒の運動は棒を含む面内に限定して上下運動と C の周りの回転運動を考える。ラグランジアンと運動方程式を求めなさい。ただし、C の回りの回転角は十分小さいとする。



[6] y 軸上に支点をもつ単振り子の支点 O’が、原点 O から $S = S(t)$ にしたがって動く。$S(t)$ が次の場合、ふれの角度 θ は小さいとして単振り子の先端の質点 m の運動を求めなさい。



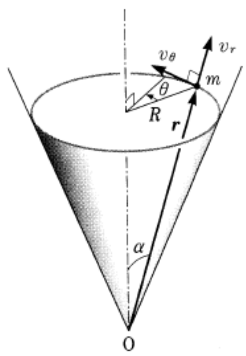
(a) $S(t)$= 一定

(b) $S(t) = S_0 t$

(c) $S(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$

(d) $S(t) = S_0 \cos \omega_0 t$ について共鳴が起きる ω_0 を求めなさい。

[7] 頂角 2α の逆円錐を軸が鉛直方向を向くように置く。この内面に沿って動く質量 m の質点の運動を考える。一般化座標を r と θ として以下の問いに答えなさい。

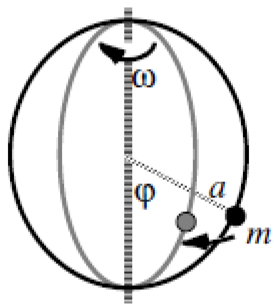


(a) ラグランジアンを求めなさい。
(b) ラグランジュの運動方程式を求めなさい。
(c) 質点が $r = r_0 =$ 一定で水平向きに円運動を行う条件を求めなさい。
(d) 質点が円運動をしているときに、内面に沿って上向きの小さな撃力を質点に加える。撃力を加えた後の運動がどの様になるか説明しなさい。

[8] 引力を及ぼす二次元中心力場（ポテンシャル $U(r)$）を運動する粒子に関して次の問に答えなさい。

(a) ラグランジアンを求めなさい。
(b) 運動方程式を求めなさい。
(c) 角運動量 J が保存量であることを示しなさい。
(d) 動径方向の運動方程式は、$m\ddot{r} = -dW/dr$ と書くことができる。（W は「有効ポテンシャル」と呼ばれる。） W を J などを用いて表しなさい。
(e) 有効ポテンシャルを使って円運動になる条件を求めなさい。（円運動の半径を r_0 とする。）
(f) 中心力ポテンシャルが $U(r) = kr^2$ のとき、円運動の周期を求めなさい。
(g) $U(r) = kr^2$ のもとで円運動をしている粒子が弱い撃力（r 方向）を受けて r 方向に微小な振動を始めた。微小振動の周期を求めなさい。

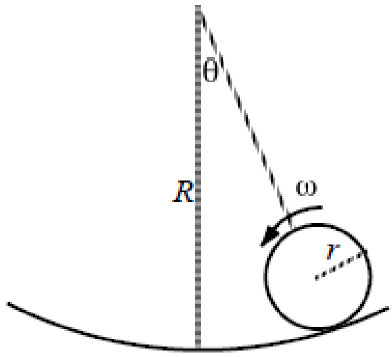
[9] 一定の角速度 ω で鉛直な中心軸（直径）のまわりに回転する滑らかな円輪（半径 a）に質量 m の質点が束縛されている。



(a) ラグランジアンを求めなさい。
(b) 運動方程式を求めなさい。
(c) 円輪に相対的に静止する質点の位置（φ）を、(i) $g > a\omega^2$ と(ii) $g < a\omega^2$ の場合についてそれぞれ求なさい。ただし、安定平衡も不安定平衡も含める。g は重力加速度である。
(d) (c)で求めた位置のうち最下点 φ_0 は安定平衡か、それとも不安定平衡か、(i)と(ii)の場合についてそれぞれ調べなさい。また、安定平衡の場合には最下点付近の微小振動の周期を求めなさい。
（ヒント : 運動方程式を φ_0 のまわりで Taylor 展開しなさい。このとき、近似した運動方程式が振動解を持つならば安定平衡、そうでなければ不安定平衡である。）

[10] 図のように軸を水平に固定された粗い円筒面（半径 R）の内側を一様な直円柱（質量 M、半径 r、ただし $r < R$）が滑らずに転がる運動を考える。

(a) 直円柱の回転軸の周りにおける慣性モーメントを求めなさい。
(b) 角速度 ω で滑らずに転がるとき、ω と θ の関係を求めなさい。
(c) 一般化座標を θ に選ぶときのラグランジアンを求めなさい。
(d) 運動方程式を求めなさい。
(e) $\theta = 0$ の付近における微小振動の周期を求めなさい。

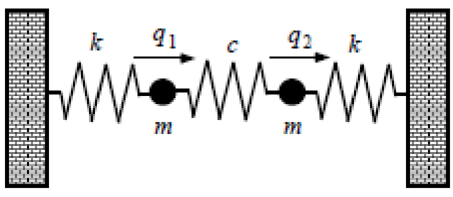


[11] 滑らかな水平な板に空けられた小穴に長さ l の糸を通し、その上端に質量 m の質点を結んで板の上におき、下端に質量 M のおもりを結んで吊るす。

(a) 小穴と質点（m）の距離 r と，質点（m）の回転角 φ を一般化座標にとるときのラグランジアンを求めなさい。
(b) ラグランジュの運動方程式を求めなさい。
(c) 角運動量 J が保存量であることを示しなさい。
(d) 運動方程式を $(m + M)\ \ddot{r} = -dW／dr$ としたときの W を J 等を用いて表しなさい。
(e) 質点（m）が半径 a の円運動になるときの J を求めなさい。

[12] 図のように二つの等しい質量 m の質点を弾性定数が c、k であるような（両端が k、中央が c）バネで連結し、釣合の位置付近でバネの方向に振動させる。

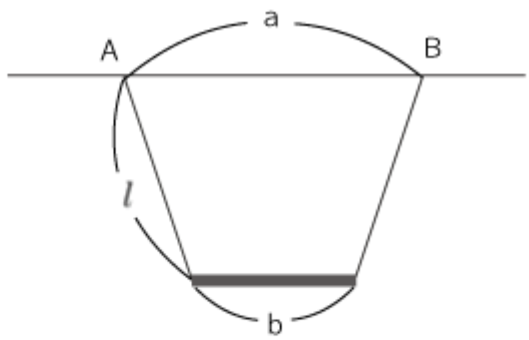
(a) 質点の変位を q_1、q_2 としたときのラグランジアンを求めなさ。
(b) ラグランジュの運動方程式を求めなさい。
(c) $q_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha)$、$q_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha)$ とおいて A_1、A_2 に関する方程式を求めなさい。
(d) A_1、A_2 が同時に 0 にならない条件から固有振動数 ω を求めなさい。
(e) (d)で求めた固有振動数に対する A_1、A_2 の関係を求め、振動の様子を図示しなさい。



[13] 単振り子の支点がバネ（バネ定数 k）によって水平に動きうる場合の微小振動を考える。支点の変位 X、振子の振れの角度 ϕ を一般化座標として以下の問に答えなさい。

(a) ラグランジアンを求めなさい。
(b) 運動方程式を求めなさい。
(c) $X = A\cos(\omega t + \alpha)$、 $\phi = B\cos(\omega t + \alpha)$ とおいて A、B に関する方程式を求めなさい
(d) A、B が同時に 0 にならない条件から微小振動の周期を求めなさい。

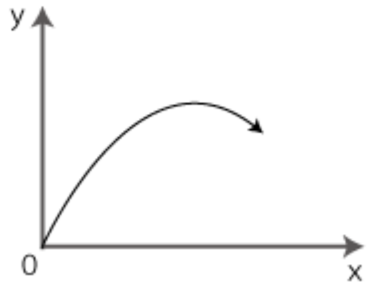
[14] 水平に距離 a だけ離れた固定点 A、B にそれぞれ長さ l の糸を付け、他端に長さ b の一様な棒を吊るす。この棒を重心の周りに僅かにねじって放したときの微小な振動を考える。ラグランジュの運動方程式と振動の周期を求めよ。ただし、a > b とする。



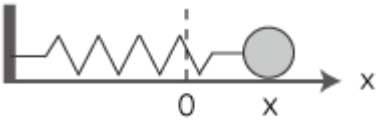
[15] 引力を及ぼす二次元中心力場（ポテンシャル U(r)）を運動する粒子に関して次の問に答えなさい.

(a) ラグランジアンを求めなさい。
(b) 正準運動量を求めなさい。
(c) ハミルトニアンを求めなさい。
(d) 正準運動方程式を求めなさい。

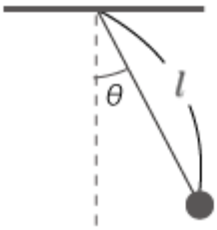
[16] 放物運動を行う質点についてラグランジュの運動方程式を立て、運動方程式を記述し、ハミルトニアンを求めなさい。



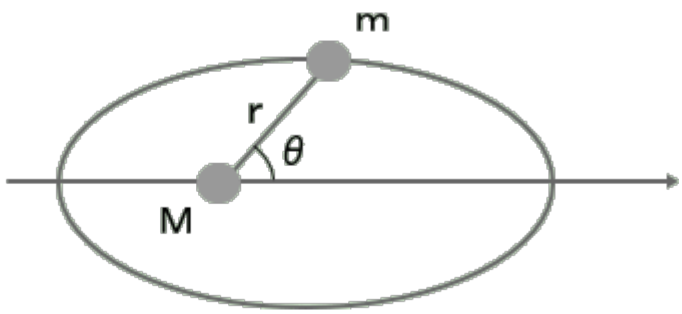
[17] 単振動している１次元調和振動子についてラグランジュの運動方程式を立て、運動方程式を記述し、ハミルトニアンを求めなさい。



[18] 下図の単振り子について、ラグランジュの運動方程式を立て、運動方程式を記述し、ハミルトニアンを求めなさい。



[19] 万有引力により、質量Mの質点の周りを楕円運動する質量mの質点を考える。質量mの質点について、ラグランジュの運動方程式を立て、運動方程式を記述してハミルトニアンを求めなさい。



[20] 図のような原点 A と点 B がある。最初に点 A に静止していた質点 P が、y 軸方向下向きに一様に働く重力加速度 g の下で滑らかな曲線 $y = f(x)$ に沿って点 A から点 B まで滑り落ちるとき、点 B に到達するのに要する時間を最小とする $f(x)$ を求めなさい。但し、点 A と点 B の x 座標は異なるものとする。