

# 1 電荷に働く力

クーロンの法則：静止した電荷に働く力

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{R}_{12}|^2} \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} \quad (1)$$

二つの電荷  $q_1$  と  $q_2$  の間に働く力は中心力で、力の大きさは  $q_1, q_2$  それぞれに比例し、逆二乗則と作用反作用の法則が成り立つ。



Charles-Augustin de Coulomb (14 June 1736 - 23 August 1806)

## [1] 例題：クーロン力と万有引力

クーロン力と万有引力は、見かけの類似性にも関わらず、本質は極めて異なる。そこで両者の比を求めてみよう。

陽子と電子が距離  $R$  だけはなれて静止している。その時両者に働くクーロン力と万有引力を求め、両者の比を調べてみよう。陽子と電子の質量はそれぞれ、 $M = 1.7 \times 10^{-27}$  kg,  $m = 9.1 \times 10^{-31}$  kg, 真空の誘電率は  $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12}$  C<sup>2</sup>N<sup>-1</sup>m<sup>-2</sup>, 電気素量は  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C, 万有引力の定数は  $G = 6.7 \times 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>kg<sup>-2</sup> である。

(例解)

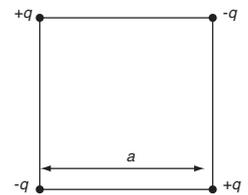
$$F_C = \frac{(1.6 \times 10^{-19}[\text{C}])^2}{4\pi R^2[\text{m}^2] 8.9 \times 10^{-12}[\text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}]} = 2.3 \times 10^{-28} R^{-2}[\text{N}] \quad (2)$$

$$F_G = \frac{6.7 \times 10^{-11}[\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}] 1.7 \times 10^{-27}[\text{kg}] 9.1 \times 10^{-31}[\text{kg}]}{R^2[\text{m}^2]} = 1.0 \times 10^{-67} R^{-2}[\text{N}] \quad (3)$$

$$\frac{F_G}{F_C} = 4.3 \times 10^{-40} \quad (4)$$

## [2] クーロン力の重ねあわせ

右図の様に、一辺  $a$  の正方形の頂点にそれぞれ  $\pm q$  の電荷をもつ4個の点電荷がおかれている。1個の電荷に他の3個の電荷から働く力の合力の大きさを求め、その方向を図示せよ。



(キモチ) 結晶中の原子が感じる結晶場ポテンシャル

遠隔作用と近接作用

近接作用 … 中間の媒介物を通して力が作用する。

遠隔作用 … 距離を隔てて直接作用する。

電気と磁気の力を初めて科学的に説明しようとしたのはギルバート（エリザベス一世の侍医、1540-1603）である。彼は電気の引力について、摩擦された物体から放出された微粒子が元に戻る時に物体を引き寄せるとする微粒子説を唱えた（近接作用）。デカルトは、全ての力が圧力や張力の様に、空間を満たす微細物質を通して伝わると信じていた（近接作用）。しかしニュートン力学の成功後、クーロン力と万有引力の類似性から、電気力も遠隔力であるとする考え方が主流になっていった。アンペール、ノイマン、ヴェーバーの電気力学はこのような遠隔作用論であった。

それに対し、ファラデーは電気の作用が電荷の間にある媒質を順々に変えていくことによって伝わっていくものと考えた。この媒質のことを後に「場」と呼ぶ。このファラデーの近接作用論を定式化したのがマクスウェルである。ファラデーが考えた場の概念は、電磁気学のみならず、今日では物理学の基本的考え方になっている。万有引力も、一般相対論によれば重力場を介する近接作用であり、現在では遠隔作用は存在しない。

【重要】 内積はスカラー，外積はベクトル

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (5)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \quad (6)$$

### [3] スカラー3乗積： $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  の型をもつ3つのベクトルの積をスカラー3乗積（あるいは3重積）と呼ぶ。この量が  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  で囲まれる平行六面体の体積を表すことを示せ。

(1) まずベクトル  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{C}$  は  $xy$  平面上にあるとし、 $|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|$  はそれぞれのベクトルで作られる面積を表すことを確かめてみよう。

(2) つぎに、 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  で全体の体積になることを示せ。

(3)  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  となることも確かめてみよう。

### [4] ベクトル3乗積： $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{C}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$

公式  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{C}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$  を示せ。

(1) 各成分にわけて証明してみよう。

(2) この公式はよく使う公式である。そこで、たとえ公式を忘れてしまっても、自力で導ける考え方を身につけよう。(右脚注を読んで理解して下さい。)

### [5] ベクトル3乗積の応用： $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$

ベクトル3乗積の公式を用いて、

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$$

を証明せよ。

$\mathbf{V} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  なるベクトル  $\mathbf{V}$  を考える。これは、 $\mathbf{W} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$  と垂直である。一方、 $\mathbf{W}$  は  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{C}$  とも垂直である。従って、 $\mathbf{V}$  は  $\mathbf{B}-\mathbf{C}$  平面内のベクトルのはずである。そこで

$$\mathbf{V} = \ell \mathbf{B} + m \mathbf{C}$$

と表すことにする。ここで  $\ell, m$  は未定定数である。このベクトル  $\mathbf{V}$  と  $\mathbf{A}$  は垂直なので、それらの内積はゼロとなる。

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = \ell \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + m \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = 0$$

これを満たすには、

$$\ell = \lambda \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}, \quad m = -\lambda \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

ととればよい。結局、

$$\mathbf{V} = \lambda [\mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{C}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})]$$

が得られる。 $\lambda = 1$  となることは結局成分に分けた計算が必要であるが、公式の形が導かれれば、ほぼ求まったも同然である。

## 2 静電場の性質 — 電場を求める

電荷は電場を作る — 近接作用の立場から考える —

位置  $z_1$  にある電荷  $q_1$  はその周囲の空間の任意の位置  $\boldsymbol{x}$  に

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_1|^3} \quad (7)$$

なる「電場」を作る。試験電荷  $q_2$  を位置  $z_2$  にもつてくると、この試験電荷は次の力を受ける。

$$\boldsymbol{F} = q_2 \boldsymbol{E}(z_2) \quad (8)$$



Michael Faraday (22 September 1791 - 25 August 1867)

### [6] 例題：電気双極子

- (1) 点 A(0, 0, d) 及び点 B(0, 0, -d) にそれぞれ  $+q, -q$  の点電荷がおかれている時、点 P(x, y, z) に生じる電場  $\boldsymbol{E}(x, y, z)$  を求めよ。
- (2) 点 P が原点 O より十分離れている場合、点 P における電場はどのように表されるか。
- (3) 点 Q(x, 0, 0) および点 R(0, 0, z) での電場はどうなっているか。

(例解) (1) 電場の重ね合わせの原理より、両電荷が作る電場  $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_A + \boldsymbol{E}_B$  は、

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right\} \\ E_y(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{y}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} - \frac{y}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right\} \\ E_z(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{z-d}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} - \frac{z+d}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

(例解) (2) 点 O から点 P までの距離は  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  であるが、点 P が点 O から十分はなれている場合、 $r \gg d$  となる。その場合、

$$\begin{aligned} [x^2 + y^2 + (z \pm d)^2]^{3/2} &= [x^2 + y^2 + z^2 \pm 2zd + d^2]^{3/2} \simeq [r^2 \pm 2zd]^{3/2} \\ &= r^3 \left[ 1 \pm \frac{2zd}{r^2} \right]^{3/2} \simeq r^3 \left[ 1 \pm \frac{3zd}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

従って、原点から十分離れた点 P における電場は、

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x}{r^3 \left(1 - \frac{3zd}{r^2}\right)} - \frac{x}{r^3 \left(1 + \frac{3zd}{r^2}\right)} \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3} \frac{6zd}{r^2} \left[ \left(1 + \frac{3zd}{r^2}\right) \left(1 - \frac{3zd}{r^2}\right) \right]^{-1} \simeq \frac{2dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5} \end{aligned} \quad (10)$$

同様に、

$$E_y(x, y, z) \simeq \frac{2dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{r^5}, \quad E_z(x, y, z) \simeq \frac{2dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z^2 - r^2}{r^5}. \quad (11)$$

この様に、 $+q$  と  $-q$  の間隔  $2d$  が十分小さい場合、この正負の電荷対を電気双極子といい、大きさが  $2qd$  で  $-q$  から  $+q$  に向かうベクトルを双極子モーメントという。

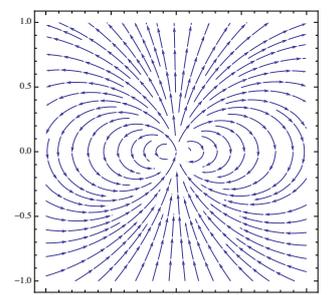
(例解) (3) 点 Q:  $E_x = E_y = 0, E_z = -\frac{2dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^3}$ , 点 R:  $E_x = E_y = 0, E_z = \frac{2dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{z^3}$

こうして定義した電場  $\boldsymbol{E}$  は、試験電荷の有無に関わらず、電荷  $q_1$  が与えられれば決定される量で、空間の任意の位置で定義することができる。遠隔作用論では2つの電荷があつて初めて力が働くと考えるが、近接作用論による電場は、試験電荷がなくてもある電荷が存在すれば定義できる。こうした近接相互作用の考えでは、クーロン力は(8)の様に解釈する。

【ポイント】高校では「力」で物理を考えたが、大学では「場」で物理を理解しよう。

テイラー展開 (マクローリン展開)  $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots$  を適用して、 $(1+x)^{3/2} \simeq 1 + \frac{3}{2}x$  を確かめてみよう。

物質中では、格子のひずみ等が双極子を生み、電気抵抗等様々な物性に影響を及ぼす。



電気双極子の作る電場

連続分布する電荷の作る場

点  $r$  の周りの微小な体積  $\Delta V$  に  $\Delta q$  の電荷があるとする。これを

$$\Delta q = \rho(\mathbf{r})\Delta V \quad (12)$$

と書くとき、 $\rho(\mathbf{r})$  を電荷密度という。空間に電荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  で連続的に分布する電荷が点  $r$  に作る電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (13)$$

点電荷が作る電場の式と見比べて、その類似性を確認しよう。

[7] 直線状電荷の作る電場

無限に長い直線上に線密度  $\lambda$  で一様に電荷が分布するとき、直線から  $r$  の距離にある点 P に生じる電場  $\mathbf{E}$  を求めよ。

- (1) 直線を長さ  $\Delta s$  の微小部分に分割し、おのこの微小部分に分布する電荷  $\lambda\Delta s$  が点 P に生じる電場を求めよ。この時、円柱座標を考え、直線方向  $z$  と、動径方向  $r$  とそれぞれの成分の電場  $\Delta\mathbf{E} = (\Delta E_r, \Delta E_z)$  を調べてみよう。
- (2) 全直線からの寄与は、(1) で求めた  $\Delta E_r, \Delta E_z$  を直線に沿った積分を求めればよい。このときでてくる、

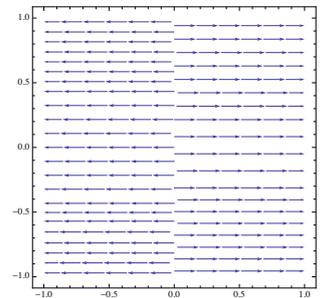
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{(r^2 + s^2)^{3/2}} ds = \frac{2}{r}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{(r^2 + s^2)^{3/2}} ds = 0$$

型の積分をまず示してみよう。  $s = r \tan \theta$  と変数変換するとよい。

- (3) 最後に、 $E_r, E_z$  を求めよう。  
(【重要】  $E(r)$  は  $r$  に依存する。 [8] (3) と比較せよ)

(ヒント)  $ds = r(1 + \tan^2 \theta)d\theta$ ,  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  となることを示してから使おう。

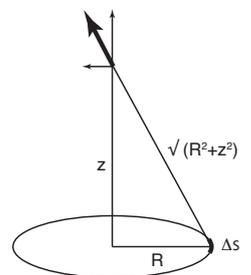


直線電荷の作る電場

[8] 様々な形状の電荷分布が作る電場

次のおおこの場合について、生じる電場を求めよ。

- (1) 半径  $R$  の輪の上に電荷が一様に分布している時、輪の中心軸上の点における電場
- (2) 半径  $R$  の円盤上に電荷が一様に分布している時、その中心軸上の点における電場。
- (3) 無限に広い平面上に電荷が一様に分布している時、任意の点に生じる電場。  
(【重要】  $E(z)$  は  $z$  に依存しない。 [7] (3) と比較せよ)



リング上電荷の作る電場

- (1) のヒント 輪の上の微小部分  $\Delta s$  が作る電場を考える。対称性を考えると、軸上方向の電場しか現れない。
- (2) のヒント 円盤は、(1) で求めたリングの動径方向積分によって作られると考える。面電荷密度と線電荷密度の関係は、 $\lambda = \sigma\Delta R'$ . 途中ででてくる積分は、変数変換しなくてもうまく積分できるはず。
- (3) のヒント 平面は、(2) で  $R \rightarrow \infty$  とすれば求まる。

直線電荷は、直線からはなれるにしたがって電場が弱くなるのに対し、平面電荷は、平面からの距離に電場は依存しない。この感覚を忘れずに !!

計算のヒント  $\int_0^a \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} dR$  型の積分が出てきた時、 $x = z^2 + R^2$  を導入すると、うまく行く。 [7] の積分ではどうしてこの変数変換を用いなかったのか、考えてみよう。

### 3 静電場の性質 — ガウスの法則 (積分形), 静電ポテンシャル

#### ガウスの法則 (積分形)

“任意の”閉曲面  $S$  が内部に全電荷  $q$  を含む場合, 次の関係が成り立つ:

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (14)$$

ここで,  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  は法線ベクトル.  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$  は, 電場の面に垂直成分.

連続電荷の場合は,

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (15)$$

と書き表すが, 要は  $q \rightarrow \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$  としただけで本質は変わらない.



Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

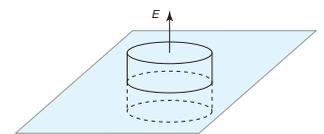
#### [9] 例題: 平面電荷のつくる電場

無限に広がる平面電荷 (面電荷密度  $\sigma$ ) の作る電場をガウスの法則を使って求めてみよう.

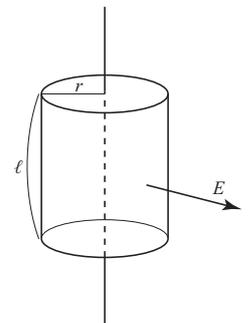
(例解) 無限に電荷が広がっているから, 電場の大きさは平面からの距離以外には依存しない. また, 電場の方向は平面に垂直で, 平面の上下で逆向きであることも対称性から分かる. そこで平曲面としては右図の様に, 上下面が面積  $S$ , 側面が平面に垂直な円筒を考え, 円筒の半分が平面の上に, 残りが下になる様にとる. 側面の法線は電場に直交するので面積分への寄与はない. 上面での電場を  $E$  とすると, 上下面の積分値は  $2ES$  である. 閉曲面内の全電荷は  $\sigma S$  であるから, ガウスの法則より

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad (16)$$

となり, 電場は上面で  $E_z = \sigma/2\epsilon_0$ , 下面で  $E_z = -\sigma/2\epsilon_0$  である. ([8](3) と同じ結果が簡単に得られた.)



ガウスの丸薬箱



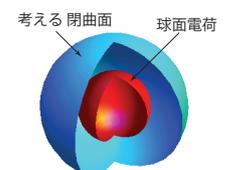
直線電荷を囲む閉曲面

#### [10] 直線電荷のつくる電場

無限に広がる直線電荷 (線電荷密度  $\lambda$ ) の作る電場をガウスの法則を使って求めてみよう.

#### [11] 球面電荷のつくる電場

半径  $R$  の球面上に一様に分布する電荷 (全電荷  $Q$ ) が作る電場を求めてみよう.



球面電荷を囲む閉曲面

球面電荷の場合, 球面の外では全電荷が球の中心にあるときと全く同じになる.

静電ポテンシャル, あるいは電位

電荷  $q_1$  が  $\mathbf{r}_1$  にあるとき, 静電ポテンシャル (または電位) は次の様に与えられる:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad (17)$$

連続電荷の場合は, 例によって, 電荷部分を置き換える:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (18)$$

電場と静電ポテンシャル

電場ベクトルは静電ポテンシャルを用いて, 次の様に表される:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (19)$$

$\nabla\phi$  は  $\phi$  の勾配と呼ばれ,  $\text{grad}\phi$  とも表される.  $\nabla\phi$  はベクトルである.

### [12] 例題: 球面電荷のつくる静電ポテンシャル

問題 [11] で考えた球面電荷が作る静電ポテンシャルを求めてみよう.

(例解) 球面の外側では, 問題 [11] で考えたことを利用すれば, 中心に点電荷があると見なすことができるので,

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R) \quad (20)$$

球面の内部では電場が 0 なのでポテンシャルは一定となる. ただし, 球面でポテンシャルは連続になっていないといけないので,

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (r < R) \quad (21)$$

### [13] 電気双極子のつくる静電ポテンシャル

問題 [6] で考えた電気双極子 (2つの点電荷  $q$  と  $-q$  が距離  $d$  隔てて置かれている) の作る十分離れた位置での静電ポテンシャルを求め, そこから電場を求めてみよう.

(1) 座標の位置を  $q: (0, 0, d/2)$ ,  $-q: (0, 0, -d/2)$  とし, 点  $P(x, y, z)$  でのポテンシャルを求めよ.

(2) テイラー展開を適用して,

$$1 / \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z \pm \frac{d}{2}\right)^2} \simeq (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \left(1 \mp \frac{1}{2} \frac{z d}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \quad (22)$$

となることを示せ.

(3) 遠方でのポテンシャルが

$$\phi(x, y, z) \simeq \frac{q d}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (23)$$

となることを示し, これを偏微分することで電場の各成分  $E_x, E_y, E_z$  を求めよ. 偏微分については, 必要があれば右脚注の小問を 確かめた上 で用いること.

偏微分について  
次の偏微分を証明せよ.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} r^n = n x r^{n-2} \quad (25)$$

結果はもちろん問題 [6] と一致するはず (ただし, 距離  $d$  の取り方が異なることに注意.)

【ポイント】 同じ問題を異なる視点から検討する習慣を身につけよう.

## 4 静電場の微分法則 — 発散の意味, ガウスの法則

微分形のガウスの法則

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (26)$$

積分形と微分形の違い：微分方程式は、最終的にはそれを解いて、すなわち積分して電場を決めるから、すでに積分したガウスの法則の方が、電荷密度があらかじめ与えられ、対称性がよい時には便利である。だが、電荷密度と電場を同時に決めなければならないとき積分形は無効である。そして何よりも、積分形は近接作用の考え方を表していない。これに対し、ある時刻、ある場所での電場と、その時刻、その場所での電荷密度の関係を与える微分形のガウスの法則が近接作用の考え方をもっとも適切に表現している。実際、これがマクスウェル方程式の1つになる。



*Yours most truly*  
W.K. Clifford

William Kingdon Clifford  
(4 May 1845-3 March 1879)

発散の用語と div の記号はクリフォードによるもの。

### [14] 例題：div の意味, わき出し

ここでは簡単のため、2次元の div を考える。右図の様にながれる“流体”と微小部分  $\Delta x \Delta y$  を考える。位置  $(x, y)$  における流れの速度を  $\mathbf{v}(x, y)$  とする。

- (1) 単位時間に線分 AB を通過して微小部分に流入する流体の量、および線分 DC を通過して流出する流体の量を求めよ。これから、AB と DC で流体の増量はいくらになるか。
- (2) 同様にして、線分 BC を通過して微小部分に流入する流体の量、および線分 AD を通過して流出する流体の量を求め、BC と AD で流体の増量はいくらになるか。
- (3) 微小面積  $\Delta x \Delta y$  あたりの増量を求め、 $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$  の極限值を求めよ。

(例解) 線分 AB を通過して流入する流体量は、

$$v_x(x, y) \Delta y$$

であり、線分 DC を通過して流出する流体量は

$$v_x(x + \Delta x, y) \Delta y$$

である。従って、流体の増量は

$$v_x(x + \Delta x, y) \Delta y - v_x(x, y) \Delta y. \quad (27)$$

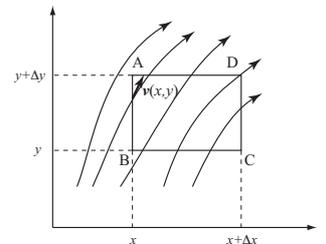
同様にして、BC と AD での増量は

$$v_y(x, y + \Delta y) \Delta x - v_y(x, y) \Delta x. \quad (28)$$

従って、増量分の総量から求まる微小面積あたりの増量率は

$$\frac{v_x(x + \Delta x, y) - v_x(x, y)}{\Delta x} + \frac{v_y(x, y + \Delta y) - v_y(x, y)}{\Delta y} \quad (29)$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (30)$$



ある流れと微小部分  $\Delta x \Delta y$ .

発散定理 (ガウスの定理)

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV \quad (31)$$

は微小体積に限らず、任意の閉曲面とそれに囲まれた体積で成り立つ。なぜなら、体積を体積要素に分割し、各体積要素に上の式を適用すると、隣り合う体積要素同士で共有する面積分は法線ベクトルが逆を向いているから必ず互いに相殺するため、共有する面をもたない体積要素の面積分のみが残るからである。

$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$  は  
 $\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS$  のこと。

[15] 発散定理の証明

発散定理を下の手順に従って確かめてみよう。

- (1) 微小な直方体 ( $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ ) を考え、 $\int_S E_x dS_x$  という積分が  $\int_V (\partial E_x / \partial x) dV$  となることを示せ。
- (2) (1) と同様のことを  $\int_S E_y dS_y$ ,  $\int_S E_z dS_z$  に対しても適用し、発散定理 (31) を証明せよ。

(1) のヒント：問題 [14] を参考に、電場  $\mathbf{E}$  が流速  $\mathbf{v}$  に対応していると考えると分かりやすい。

[16] 微分形の確認

半径  $R$  の球内に一様に分布する電荷 (電荷密度  $\rho$ ) によって作られる電場は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} & (|\mathbf{r}| \leq R) \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} & (|\mathbf{r}| > R) \end{cases} \quad (32)$$

であることが分かっている (長岡洋介「電磁気学 I」p. 46 (2.18))。これが微分形のガウスの法則を満たすことを示せ。

[17] 平面電荷のつくる電場

無限に広い平らな板 (厚さ  $d$ ) の内部に、電荷が密度  $\rho$  で一様に分布している。この電荷によって生じる電場を微分形のガウスの法則を用いて求めよ。

問題 [9] の結果と比べてみよう。

(ヒント 1) 平面を  $xy$  平面にとり、平面に垂直な方向を  $z$  軸にとる。 $z$  軸の原点は板の中心にとる。すなわち、板は  $|z| < d/2$  の範囲に存在する。

(ヒント 2) 積分の際に現れる積分定数は、境界での電場が連続になる様に定める。

## 5 静電場の微分法則 — 回転の意味, ポアソン方程式

静電場の満たす基本方程式

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (\text{ガウスの法則}), \quad (33)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{渦なしの法則}) \quad (34)$$

ガウスの法則はクーロンの法則から導いたが, クーロンの法則と同等の法則と考えてはいけない. ガウスの法則だけではクーロンの法則を一意的に導くことができない. クーロンの法則からは, ガウスの法則に加えてもう一つの基本方程式が導かれる — それが渦なしの法則である. この二つの方程式が静電場  $\mathbf{E}$  の満たす基本方程式である.

$\nabla \times \mathbf{E} = 0$  は,  $\mathbf{E}$  が保存場であることを意味している. 空間の任意の2点間で, 場  $\mathbf{E}$  の線積分が経路によらないとき,  $\mathbf{E}$  を保存場という. 逆に言えば, 保存場であるための条件は, 任意の閉曲線に沿っての線積分 (循環) が0であることである.

### [18] 例題: 一様流と渦流

大槻 p46

- (1) 全く一様な, 一方向の流れを考えてみよう. 流れの方向に  $x$  軸をとると, 速度ベクトルは  $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$  と書ける. この時,  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  を求めよ.
- (2) 次に, 右回りの角速度が一様な円形流 (渦流) を考える. ここで速さは角速度を  $\omega$  (一定) とすると,  $v = r\omega$  で与えられる.  $v_x = \omega y$ ,  $v_y = -\omega x$  となることを示し,  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  を求めよ.

(例解) (1)

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \left( 0, \frac{\partial v_x}{\partial z}, -\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (35)$$

(例解) (2)

$$v_x = v \sin \theta = \omega r \sin \theta = \omega y, \quad (36)$$

$$v_y = -v \cos \theta = -\omega r \cos \theta = -\omega x \quad (37)$$

$\operatorname{rot} \mathbf{v}$  の  $x, y$  成分は共にゼロ.

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\omega - \omega = -2\omega \quad (38)$$

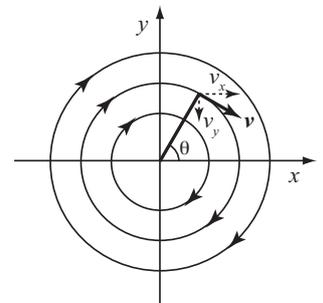
$\operatorname{rot}$  の持つ意味

$\operatorname{rot} \mathbf{v}$  は, 渦流の角速度の2倍で, その方向は右回りの時, 負になる (右ねじの方向).

渦巻き流の程度を表す量として, 渦度  $\boldsymbol{\Omega}$  というものが下の様に定義される.

$$\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad (39)$$

つまり, 渦度  $\boldsymbol{\Omega}$  は角速度ベクトル (の2倍) のことである.  $\boldsymbol{\Omega} = 0$  の時, 流れは渦なし,  $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$  の時渦があるという.



渦流

### [19] 渦なしの法則

原点に点電荷  $q$  をおいたとき, この電荷の作る電場は  $\mathbf{E} = (q/4\pi\epsilon_0)(\mathbf{r}/r^3)$  である. この時,  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  を各成分ごとに求めて, 渦なしの法則を証明せよ.

([19] のヒント) まず各成分の電場を  $x, y, z, r$  を使って表す. 次に  $\operatorname{rot}$  の定義に従って, 各成分の  $(\operatorname{rot} \mathbf{E})_{x,y,z}$  を求める. この時,  $\frac{\partial E_z}{\partial y}$  等がでてくるが,  $E_z$  は  $y$  によらないので0, 等としてはいけない.  $r$  の中に  $y$  は含まれているので, 真面目に  $\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{r^3}$  を計算しなくてはならない.

ポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (40)$$

この方程式は、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi(\mathbf{r})$  と  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  を組み合わせればすぐに導かれる。基本的には微分形の高スの法則と同じ内容のものであるが、数学的な取り扱いの上でこの方がしばしば便利である。



Siméon-Denis Poisson (21 June 1781-25 April 1840)

[20] ポアソン-ラプラス方程式を解く

半径  $R$  の球内に密度  $\rho$  で一様に分布した電荷による静電場をポアソンの方程式を解くことによって求めよ。

- (1) 電荷の分布する球の中心を原点に選ぶと、それによって生じるポテンシャルも中心対称で、原点からの距離のみの関数になる。それを  $\phi(r)$  とおいて、次の関係を証明せよ。

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} \quad (42)$$

- (2) (1) の関係を  $y, z$  成分にも適用し、次の関係を示せ。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(r) &= \frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] \end{aligned} \quad (43)$$

- (3) (2) の結果から、ポアソン-ラプラス方程式は、

$$r > R \text{ のとき } \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] = 0, \quad (44)$$

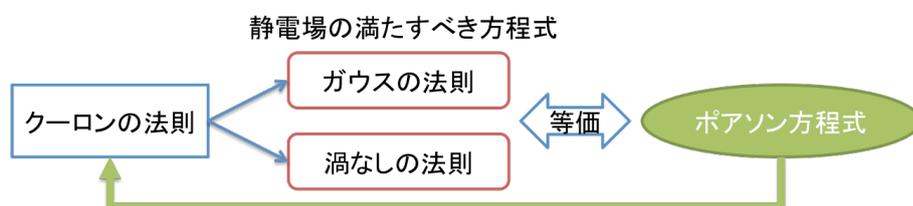
$$r \leq R \text{ のとき } \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (45)$$

となる。境界条件は  $r \rightarrow \infty$  のとき  $\phi(r) \rightarrow 0$  である。これを用いて、(44)、(45) を積分して解き、求めるポテンシャルは次のようになることを導け。

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 & (r \leq R) \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} & (r > R) \end{cases} \quad (46)$$

ポアソン方程式の解の一意性

電荷分布と境界条件が与えられた時、ポアソン方程式の解は ただ一つに決まる。



ポアソン方程式の解は1つしかなく、その解がクーロンの法則から得られる静電場と同一

【ラプラス方程式について】  
ラプラス方程式が適用される例は、静電気の問題の他に、弾性振動を書き表す波動方程式において、時間変化を考えない場合にはやはりラプラス方程式に帰着する。熱の流れを取り扱う場合にも、流れが定常である場合には温度はラプラス方程式を満足しなければならない。また拡散や、定常な電流の問題もその例である。波動力学に現れる波動方程式の中にもラプラスアンが含まれ、ラプラス方程式とよく似た方法で解くことができるので、ラプラス方程式は数物理学で極めて大切な役割をもっている。

【ここまでをふりかえって】  
私たちはクーロンの法則から出発し、静電場の満たすべき方程式として、高スの法則と渦なしの法則を得た。ポアソン方程式はこの2法則と同等である。しかし高スの法則と渦なしの法則で静電場の性質が言い尽くされているかどうかは不明であった。これらの2法則から出発して、別の静電場をとる場合があれば、他に何かまだ見つけていない原理があることになる。しかし、それらと同等なポアソン方程式を適当な境界条件の下で解けば、解は一つしか得られない。このことはその解がクーロンの法則から得られるものと同一であることを意味する。こうして高スの法則と渦なしの法則だけで静電場が完全に決められることが示された。

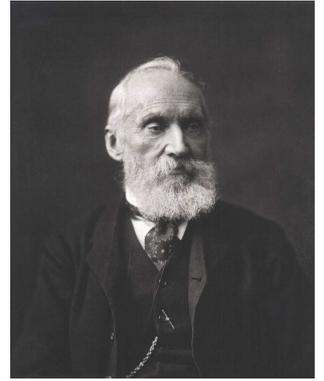
## 6 導体と静電場 — 鏡像法, 電気容量

### 導体の静電場と電位

- 導体内部では電場がなく, それゆえポテンシャルの傾きはいたるところでゼロ. (ポテンシャルは導体内部で一定)
- 導体表面で電場は表面に垂直.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \quad (\text{クーロンの定理}) \quad (47)$$

上式は, 平面電荷が作る電場の2倍になっている. ガウスの丸薬箱を考えると, 平面電荷のときは電場に垂直な面は上面, 下面あわせて  $2S$  であった. 従って,  $2ES = \sigma S/\epsilon_0$ . 今の場合, 導体内には電場がないので, 一方の面からの寄与がなくなり,  $ES = \sigma S/\epsilon_0$  となる.



William Thomson, 1st Baron Kelvin (or Lord Kelvin), (26 June 1824 - 17 December 1907)  
鏡像法は W. トムソンが 1948 年編み出した.

### [21] 地球の電荷

地球の表面付近には, 下向きの電場が平均  $100\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$  ほど生じている. 地球の半径を  $6400\text{km}$  とすると, 地球全体がもつ電荷は何クーロンになるか. ( $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1}$ )

### [22] 例題: 鏡像法

導体の広い平らな表面から距離  $a$  の位置に点電荷  $q$  がおかれている. このとき生じる電場, および表面に誘起される電荷密度を求めよ.

(例解) 点電荷の位置  $(0, 0, a)$  から空間の任意の位置  $(x, y, z)$  までの距離を  $R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}$  とすると, 電位  $\phi = q/4\pi\epsilon_0 R_1$  はポアソン方程式を満たすが, 導体表面での境界条件「導体表面でポテンシャルは一定」を満たさない. そこで問題をすり替えて, 導体を取り外し, 導体表面に関しての鏡像の位置である  $(0, 0, -a)$  に (任意の位置までの距離を  $R_2$ ) 点電荷  $-q$  をおいてみる. この時ポテンシャルは

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (48)$$

と容易に求まる. このポテンシャルは明らかに, 表面上 ( $z = 0$ ) でゼロであり, 境界条件を満たす. これらの電荷が作る電場は, 双極子が作る電場と同じになり, 問題 [6] (1) と同じ形が得られる. 例えば表面に垂直方向の成分は,

$$E_z = -\frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{z - a}{R_1^3} - \frac{z + a}{R_2^3} \right\} \quad (49)$$

特に導体表面では,

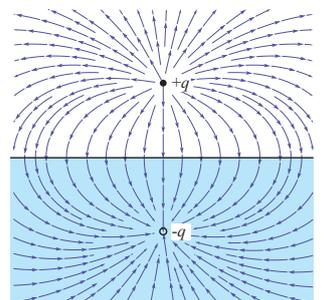
$$E_z = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \quad (50)$$

となり, 表面における電荷密度はクーロンの定理より, 次の形で与えられる.

$$\sigma(x, y) = \epsilon_0 E_z(x, y, 0) = -\frac{q}{2\pi} \frac{a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \quad (51)$$

### 【なぜ鏡像法?】

問題 [22] の様な状況を考える際, 点電荷のために導体表面に異符号の電荷がクーロン力によって引きつけられてくる. 従って電荷密度は点電荷から最短距離にある場所にもっとも大きく, そこを遠ざかるに従い小さくなるのが予想される. しかしこの電荷分布は前もっては分からないので, 電荷分布からポテンシャルを計算することはできない. この問題をうまく解くのが [22] で取り扱う鏡像法 (映像法, 影増法とかいくつか呼び方がある) である. 分かっているポテンシャルがあったとして, その等ポテンシャル面に導体をおいても状況は変わらない. (導体内ではポテンシャルは等しいので) このことを逆手に取ったのが鏡像法である. 極論すれば, 様々な状況の等ポテンシャル面に沿った導体を考えれば, その導体近くにおいた点電荷の問題は求まったと同然である.



鏡像電荷とその電場

[23] 一様電場中の導体球

一様な静電場  $E_0$  の中に帯電していない導体球（半径  $R$ ）をおいたとき、静電場はどのように変わるか。

- (1) 一様な静電場  $E_0$  が作るポテンシャルを求めよ。(ヒント： $E = -\nabla\phi$  から逆算)
- (2) 電気双極子に依るポテンシャルは、双極子モーメントを  $p$  として、

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (52)$$

で与えられる。これと (1) で求めた一様電場の作るポテンシャルを重ねあわせ、 $p = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$  とおくと、全体のポテンシャルはどうなるか。

- (3) これが求める一様電場中に導体球をおいたときのポテンシャルになっていることを確かめよ。

コンデンサーの電気容量

2つの導体がそれぞれ電荷  $q$  と  $-q$  に帯電して電荷が蓄えられている時、これをコンデンサーという。コンデンサーの電気容量は、導体間の電位差 ( $\Delta\phi$ ) あたりの電荷によって定義される。

$$C = \frac{q}{\Delta\phi} \quad (53)$$

[24] 平行板コンデンサー

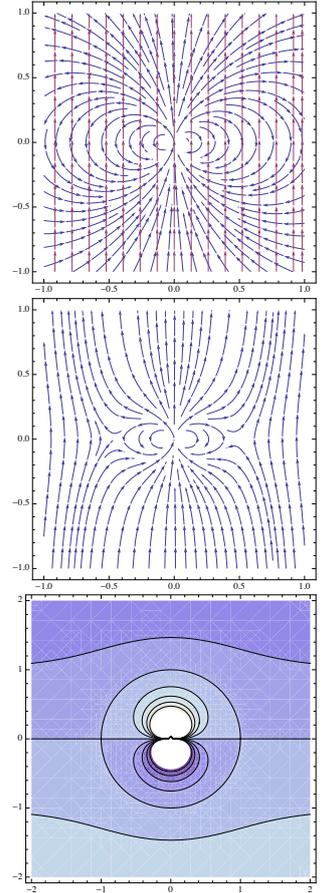
2枚の平らな導体板を平行に並べたコンデンサーを平行板コンデンサーという。導体板の面積を  $S$ 、板の間隔を  $d$  として、平行板コンデンサーの電気容量を求めよ。(端の効果は無視してよい)

- (1) 平行板のそれぞれに  $\pm q$  の電荷を与えたとして、その面密度を求め、そこからガウスの法則を用いて電場の強さ（コンデンサーの内部と外部それぞれ）を求めよ。
- (2) 求められた電場から、導体板間の電位差を導き、電気容量を求めよ。

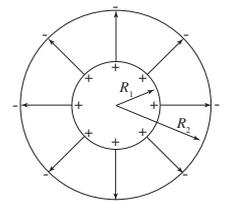
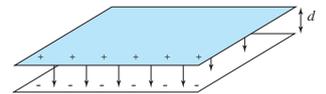
[25] 同心球殻コンデンサー

内径  $R_1$ 、外径  $R_2$  の同心球殻コンデンサーについて、その電気容量を求めよ。

- (1) 内殻、外殻にそれぞれ  $+q$ 、 $-q$  の電荷を与え、それらが一様に分布したとする。両球殻間に生じる中心からの距離が  $r$  の地点での電場を求めよ。(ヒント：ガウスの法則（積分形）を思い出せ)
- (2)  $E = -\nabla\phi$  より、電位差は電場を積分することによって求められる。両殻間の電位差を求めよ。また、そこから電気容量を求めよ。



上：一様電場と双極子モーメント、それぞれの電場、中：それらを足しあわせたもの、下：一様電場と双極子が作るポテンシャルの等ポテンシャル面



平行板コンデンサーと同心球殻コンデンサー