物理数学

行列と行列式

担当　石原一

1．行列

$$A=\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{第1行} \\ \leftarrow \text{第2行} \\ \\ \leftarrow \text{第}m\text{行} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{第1列} & \text{第2列} & \text{第}n\text{列} \end{array}$$

a_{mn}　全て実数の場合 ：**<u>実行列</u>**

一行のみの場合 ：**<u>行ベクトル</u>**　　一列のみの場合 ：**<u>列ベクトル</u>**

行と列が等しい行列　<u>$n\times n$ **行列**</u>　または **<u>n次の正方行列</u>**

行列の表記：　A または (a_{jk})

行列の演算

１．２つのm行n列の行列 $A=\left(a_{jk}\right)$と $B=\left(b_{jk}\right)$ の和 $A+B$

→　その要素が $c_{jk}=a_{jk}+b_{jk}$ のm行n列の行列 $C=\left(c_{jk}\right)$

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\ A+B=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}\qquad A-B=\begin{pmatrix} -10 & 9 & 3 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

２．m行n列の行列$A=\left(a_{jk}\right)$ と数sの積

→　そのすべての要素にsをかけて得られるm行n列の行列 $sA=\left(sa_{jk}\right)$

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\ \text{ならば},\ 3A=\begin{pmatrix} -6 & 15 & 9 \\ 0 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

３．$A=\left(a_{jk}\right)$ をm行n列の行列、$B=\left(b_{jk}\right)$ をn行p列の行列とする。

積ABは、その要素が$c_{jk}=\sum_{l=1}^{n}a_{jl}b_{lk}$ で与えられるm行p列の行列

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\qquad \text{ならば}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 20-1+4 & 12+2+8 \\ 10+0-6 & 6+0-12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 22 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

積ABが定義されるのは、行列Aの列の数と行列Bの行の数が等しい時だけ

一般に行列の積はその順序による。 積ABと積BAが存在する時、一般には $AB\neq BA$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行列の積の規則

1） k をスカラーとして $(kA)B = k(AB) = A(kB)$

2） 結合則 $A(BC) = (AB)C$

3） 分配則 $(A+B)C = AC + BC$, $C(A+B) = CA + CB$

転置行列

行と列を入れ替えた行列

$$A = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{\mathrm{T}} = (a_{kj}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

対称行列

$A^{\mathrm{T}} = A$ すなわち $a_{jk} = a_{kj}$ のときの実正方行列 $A = (a_{jk})$ は対称行列

交代行列（反対称行列）

$A^{\mathrm{T}} = -A$ すなわち $a_{jk} = -a_{kj}$ のときの実正方行列は交代行列、または反対称行列

$a_{jj} = -a_{jj}$ であるから、その対角要素 a_{jj} はすべて0

エルミート行列

正方行列 $A = (a_{jk})$ の要素 a_{jk} をその複素共役 $a_{jk}{}^*$ で置き換えた行列を A^* で表す。

$$A = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = (a_{jk}{}^*) = \begin{pmatrix} a_{11}{}^* & a_{12}{}^* & \cdots & a_{1n}{}^* \\ a_{21}{}^* & a_{22}{}^* & \cdots & a_{2n}{}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}{}^* & a_{n2}{}^* & \cdots & a_{nn}{}^* \end{pmatrix}$$

正方行列 $A = (a_{jk})$ は $A^{\mathrm{T}} = A^*$ すなわち $a_{kj} = a_{jk}{}^*$ のとき、エルミート行列

（実行列の場合の対称行列を、要素が複素数の場合に拡張したもの）

エルミート共役行列

転置と複素共役とを同時に行って得られる行列 $A^\dagger$

$$A = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^\dagger = (a_{kj}{}^*) = \begin{pmatrix} a_{11}{}^* & a_{21}{}^* & \cdots & a_{n1}{}^* \\ a_{12}{}^* & a_{22}{}^* & \cdots & a_{n2}{}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}{}^* & a_{2n}{}^* & \cdots & a_{nn}{}^* \end{pmatrix}$$

定義より $A^\dagger = (A^*)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^*$

エルミート行列は、行列とそのエルミート共役行列が等しい行列 $A^\dagger = A$

正方行列Aが $A^\dagger = -A$ を満たす時、反エルミート行列

<u>対角行列</u>

正方行列$A=\left(a_{jk}\right)$で、すべての非対角要素 $a_{jk}\left(j\neq k\right)$が0のもの

すべての対角要素が1の対角行列 → **<u>単位行列</u>**

例 $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

単位行列の性質 $AI=IA=A,\quad I^n=I\cdot I\cdots I=I\quad(n=1,2,\cdots)$

行列の代数において、通常の代数での1と同じ役割

すべての要素が0の行列 → ゼロ<u>行列</u>

行列の代数において、通常の代数での0と同じ役割

<u>対角和（トレース）</u>

$\mathrm{Tr}A\equiv\sum_i a_{ii}$

問題

$A(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とするとき、$A\left(\theta_1+\theta_2\right)=A\left(\theta_1\right)A\left(\theta_2\right),\quad A(\theta)A(-\theta)=I$ を示せ。

$\left(AB\right)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ を証明せよ

$$\left(\left(AB\right)^{\mathrm{T}}\right)_{jk}=\left(AB\right)_{kj}=\sum_l\left(A\right)_{kl}\left(B\right)_{lj}=\sum_l\left(B\right)_{lj}\left(A\right)_{kl}=\sum_l\left(B^{\mathrm{T}}\right)_{jl}\left(A^{\mathrm{T}}\right)_{lk}=\left(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\right)_{jk}$$

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする

σ_1, σ_2, σ_3 をパウリ行列と呼ぶ。

(i) σ_1, σ_2, σ_3 はエルミート行列であることを確かめよ。

(ii) $\sigma_1\sigma_1 = I$, $\sigma_2\sigma_2 = I$, $\sigma_3\sigma_3 = I$ を示せ。

(iii) $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$ を示せ。

2. 行列式

行列Aが正方行列であるとき、行列Aに対して

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

で表される数をn次の行列式(determinant)とよぶ。

例、2次の行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

例、3次の行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} - & + \end{array}$$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & + & + & + \end{array}$$

<u>小行列式</u>

$$M_{jk} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & & a_{jk} & & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ に対して

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

余因子

小行列式 M_{jk} に $(-1)^{j+k}$ をかけたものを a_{jk} の余因子といい、C_{jk} 書く。

$$C_{jk}=(-1)^{j+k}M_{jk}$$

n次の行列式は

$$D=a_{j1}C_{j1}+a_{j2}C_{j2}+\cdots+a_{jn}C_{jn} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$
$$D=a_{1k}C_{1k}+a_{2k}C_{2k}+\cdots+a_{nk}C_{nk} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

行列式を展開するのに任意の行または列を用いることができる。

チェック

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_{11}=a_{22},\quad M_{12}=a_{21}$$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=a_{22},\quad C_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-a_{21}$$

$$D=a_{j1}C_{j1}+a_{j2}C_{j2}+\cdots+a_{jn}C_{jn} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

でj=1とおいて　$D=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

チェック

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$C_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad C_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad C_{13}=M_{13}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D=a_{j1}C_{j1}+a_{j2}C_{j2}+\cdots+a_{jn}C_{jn} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

で j=1 とおいて

$$D=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

行列式の計算において便利な性質

1） 行列式の行と列を交換してもその値は変わらない（$|A| = |A^{\mathrm{T}}|$）
2） どの行で展開してもどの列で展開しても行列式の値は変わらない。
3） ある行（または列）の要素がすべて0ならば行列式は0である。
4） 行列式の任意の2行（又は2列）を交換すると、その値は符号だけ変わる。
5） 行列式の1つの行（または列）の全ての要素に同一の数をかけて得られる行列式の値は、もとの行列式の値にその数をかけたものに等しい。
6） 二つの行（または列）の対応する要素が比例しているならば、行列式は0である。
7） 行列式の任意の行（または列）の全ての要素に同じ数をかけて、これを他の行（または列）の対応する要素に加えても行列式の値は変わらない。

例 $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 8 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3+2\times2 & -2+2\times1 & 4+2\times5 \\ 8-2 & 1-1 & 7-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 14 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -(14-84) = 70$$

8） A, Bが正方行列ならば、 $|AB| = |A||B|$

線形独立

n次の正方行列Aの行ベクトル（又は列ベクトル）を $v_1, v_2, \cdots v_n$ とする。
$\det A = 0$となるための必要十分条件は $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n = 0$ となるような、少なくとも1つが0でない定数 $k_1, k_2, \cdots k_n$ が存在すること。
この条件が成り立つとき、ベクトル $v_1, v_2, \cdots v_n$ は線形従属（一次従属）である。
そうでない時は線形独立（1次独立）。

例 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 \neq 0$　ベクトル(3,1)とベクトル(1,3)は線形独立

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$　ベクトル(3,1)とベクトル(-6,-2)は線形従属

逆行列

$n\times n$ 行列 $A=(a_{jk})$ の逆行列 A^{-1} は

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$ を満たす行列。

逆行列を持つ行列Aは正則である。

$\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ として

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

一般に正則な行列$A=(a_{jk})$の逆行列は、a_{jk} の余因子 C_{jk} と行列式 $D=\det A$ を使って

$$A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

j 行 k 列に現れる余因子は C_{jk} ではなく C_{kj} であることに注意

例題

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ の逆行列を求めよ

例題

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ の逆行列を求めよ

$$\det A=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=1$$

$$C_{11}=\begin{vmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\cos\theta,\quad C_{12}=-\begin{vmatrix}-\sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\sin\theta$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix}\sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-\sin\theta,\quad C_{22}=-\begin{vmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\cos\theta$$

$$C_{33}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=1,\quad C_{13}=C_{23}=C_{31}=C_{32}=0$$

従って $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 　　$AA^{-1}=A^{-1}A=I$ により検算可能

正方行列 $A=(a_{jk})$ は $A^{\mathrm{T}}=(A^*)^{-1}$ を満たすとき、ユニタリー行列という。

実ユニタリー行列は直交行列という。直交行列は、逆行列と転置行列が等しい実行列。

$$A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$$

２つの列ベクトル $A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$ があるとき、

$$(A^*)^{\mathrm{T}}B=\begin{pmatrix}a_1^* & a_2^* & a_3^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=a_1^*b_1+a_2^*b_2+a_3^*b_3=0$$

ならば、ベクトルAとBは直交している。ユニタリー行列や直交行列の列ベクトルは互いに直交している。また行ベクトルも直交している。

問題

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ について

(1) $\det A$ を求めよ。　(2) A^{-1} を求めよ。　(3) A は直行行列であることを示せ。

問題

行列A, Bがともに正則であれば$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$であることを示せ。

問題

ベクトル $A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は互いに直行することを示せ。

問題

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$ の逆行列を求めよ。

問題

$$A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$ について

(1) $\det A$ を求めよ。　(2) A^{-1} を求めよ。　(3) A は直行行列であることを示せ。

行列A, Bがともに正則であれば$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ であることを示せ。

ベクトル $A_1=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\\ 0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ は互いに直行することを示せ。

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}$$ の逆行列を求めよ。

3. 行列式による連立一次方程式の解法

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1&=b_1a_{22}-b_2a_{12}\\ (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2&=a_{11}b_1-a_{21}b_2\end{aligned}$$

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$$

$$Dx_1=D_1,\quad Dx_2=D_2$$

行列式D_1は行列式Dの第１列をb_1, b_2を要素とする列ベクトルで置き換えたもの。
行列式D_2は行列式Dの第２列をb_1, b_2を要素とする列ベクトルで置き換えたもの。

$D\neq 0$　ならば　$x_1=\dfrac{D_1}{D},\quad x_2=\dfrac{D_2}{D}$

$D=0$　は、係数の間に線形従属の関係 $k_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{12}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}a_{21}\\ a_{22}\end{pmatrix}=0$

があることを示す。　したがって、$k_1b_1+k_2b_2=0$ でなければ $\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2\end{aligned}$

をみたすx_1, x_2は存在しない。

$D=0$ で $k_1b_1+k_2b_2=0$のときには2つの方程式は独立でない。

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$$ の場合　$D_1 = D_2 = 0$

明らかに $D \neq 0$ ならば、$x_1 = x_2 = 0$　　$\left(x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \quad x_2 = \dfrac{D_2}{D} \right)$

一方、$D = 0$ ならば上方程式は独立な方程式ではなく、x_1 と x_2 の比しか決まらない。

一般に、n 個の未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対する n 個の1次方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

を解くことを考える。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

あるいは $AX=B$

Aが正則であれば逆行列A^{-1}が存在し、$X=A^{-1}B$

すなわち、 $x_k = \sum_{l=1}^{n} \left(A^{-1} \right)_{kl} b_l$ と解くことが出来る。逆行列の表式を代入すると

$$x_k = \frac{1}{D} \sum_{l=1}^{n} C_{lk} b_l = \frac{D_k}{D}$$

クラメルの公式

$D_k = \sum_{l=1}^{n} C_{lk} b_l$ は行列式$D=\det A$のk列目を要素 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ の列ベクトルで置き換えたもの。

例１ $\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3 \end{aligned}$ の解は

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$ ならば

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

として、 $x_1=\dfrac{D_1}{D},\quad x_2=\dfrac{D_2}{D},\quad x_3=\dfrac{D_3}{D}$

一次方程式 $\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n \end{aligned}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{pmatrix}$ あるいは $AX=B$

の解は、$D=\det A$として、次のようにまとめられる。

1） $D\neq 0, B\neq 0$ ならば、少なくとも1つのx_kが0でない一意な解がある。

2） $D\neq 0, B=0$ ならば $X=0$, すなわち $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ だけが解である。（自明な解）

3） $D=0, B=0$ ならば、自明な解以外に無限個の解が存在する。この場合、
方程式の少なくとも1つは他の方程式から得られる。

4） $D=0, B\neq 0$ ならば、すべてのD_kが 0 のときだけに無限個の解が存在する。
そうでなければ解は存在しない。

一次方程式$AX=0$が与えられたとき、この方程式では$X=0$は常に解（自明な解）である。
また、$D\neq 0$ ならば、クラメルの公式によって解は一意的に求まるので、$X=0$が
ただ一つの解。したがって、自明でない解をもつためには、$D=0$ でなければならない。