問題

(1)
$$
\begin{aligned}
4x+6y+z&=2\\
2x+y-4z&=3\\
3x-2y+5z&=8
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
4x+6y+z&=0\\
2x+y-4z&=0\\
3x-2y+5z&=0
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
-x+y+2z&=0\\
3x+4y+z&=0\\
2x+5y+3z&=0
\end{aligned}
$$

(4)
$$
\begin{aligned}
-x+y+2z&=1\\
3x+4y+z&=3\\
2x+5y+3z&=5
\end{aligned}
$$

4. 行列の固有値と行列の対角化

固有値と固有ベクトル

$A=\left(a_{jk}\right)$ を $n\times n$ 行列、Xを列ベクトルとして、一次方程式

$$AX=\lambda X$$

を考える。

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\left(a_{11}-\lambda\right)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\
&a_{21}x_1+\left(a_{22}-\lambda\right)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+\left(a_{nn}-\lambda\right)x_n=0
\end{aligned}
$$

上式は常に自明な解X=0、すなわち $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ を持つ。
自明でない解をもつのは、係数から作られる行列式が0、すなわち

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda
\end{vmatrix}=0
$$

のとき。　　λに対する n 次の方程式。　その根 $\lambda_1,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ を固有値という。

各固有値λ_k (k=1,2,…,n)に対して、固有値方程式

$$AX_k = \lambda_k X_k \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

は自明でない解 X_kを持つ。ベクトル X_k をλ_k に対する固有ベクトルという。

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$D(\lambda) \equiv \det|A - \lambda I| = 0$$

固有方程式（特性方程式）

固有値は一般に複素数。 固有方程式は重根を持つこともある。
（固有値が縮退しているという）

以下の議論ではすべての固有値は相異なるとする。

例題　　行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求めよ。

行列の対角化

$A=(a_{jk})$ を $n\times n$ の対称行列、すなわち $A^{\mathrm{T}}=A$ として固有値方程式 $AX=\lambda X$ を考える。固有値をλ_k、それに対応する固有ベクトルをv_kとすると

$$Av_k=\lambda_k v_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

簡単のため固有値は全て異なるとする。列ベクトルv_k

$$v_k=\begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

を並べて行列 $V=(v_1,v_2\cdots,v_n)=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$ を作る

行列 $V=(v_1,v_2\cdots,v_n)=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$

は $Av_k=\lambda_k v_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$ 、すなわち $\sum_{l=1}^{n} a_{jl}v_{lk}=\lambda_k v_{jk}=v_{jk}\lambda_k$ から分かるように

$AV=V\Lambda$ をみたす。ここで行列Λは対角要素が固有値である対角行列

$$\Lambda==\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

である。 $AV=V\Lambda$ の転置をとる。 $A^{\mathrm{T}}=A,\ \ \Lambda^{\mathrm{T}}=\Lambda$ であり、また行列の積の転置は $(AV)^{\mathrm{T}}=V^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ であるので、 $AV=V\Lambda$ より $V^{\mathrm{T}}A=\Lambda V^{\mathrm{T}}$

$AV=V\Lambda$ の左から V^{T} をかけ、$V^{\mathrm{T}}A=\Lambda V^{\mathrm{T}}$ の右から V をかけた式を比べると

$$V^{\mathrm{T}}VA=\Lambda V^{\mathrm{T}}V$$ を得る。

$V^{\mathrm{T}}VA = \Lambda V^{\mathrm{T}}V$ の左辺と右辺の(j, k)要素はおのおの

$$\left(V^{\mathrm{T}}V\Lambda\right)_{jk} = \sum_{l=1}^{n}\left(V^{\mathrm{T}}V\right)_{jl}\Lambda_{lk} = \lambda_k\left(V^{\mathrm{T}}V\right)_{jk}$$

$$\left(\Lambda V^{\mathrm{T}}V\right)_{jk} = \sum_{l=1}^{n}\Lambda_{jl}\left(V^{\mathrm{T}}V\right)_{lk} = \lambda_j\left(V^{\mathrm{T}}V\right)_{jk}$$

ゆえに　$\lambda_k\left(V^{\mathrm{T}}V\right)_{jk} = \lambda_j\left(V^{\mathrm{T}}V\right)_{jk}$

$\lambda_j \neq \lambda_k\,(j \neq k)$ と仮定したので　$\left(V^{\mathrm{T}}V\right)_{jk} = 0 \quad (j \neq k)$

$\lambda_k\left(V^{\mathrm{T}}V\right)_{jk} = \lambda_j\left(V^{\mathrm{T}}V\right)_{jk}$　で $j = k$ としたものは単に恒等式。

したがって、行列 $V^{\mathrm{T}}V$ の対角要素 $\left(V^{\mathrm{T}}V\right)_{jj}\,(j = 1,2,\cdots,n)$ は任意であり、

大きさを1と取れる。 ⇒ $\left(V^{\mathrm{T}}V\right)_{jj} = 1 \quad (j = 1,2,\cdots,n)$

$\left(V^{\mathrm{T}}V\right)_{jk} = 0 \quad (j \neq k)$ と合わせて考えると、$V^{\mathrm{T}}V = I$、すなわちVは直交行列。

$AV = V\Lambda$ の左から V^{T} をかけると　$V^{\mathrm{T}}AV = V^{\mathrm{T}}V\Lambda = \Lambda$

対称行列Aは固有ベクトルv_kから作った直交行列Vによって対角行列 Λ に変換できる。

行列の対角化

Aがエルミート行列の場合はユニタリー行列Uによって、$U^{\dagger}AU$ を対角行列にできる。

例題

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化せよ。