2次形式の標準化

変数 $x_1, x_2, \cdots x_n$ の2次形式

$$Q = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k = a_{11}x_1^{\ 2} + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + \cdots + (a_{1n}+a_{n1})x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^{\ 2} \qquad + \cdots + (a_{2n}+a_{n2})x_2x_n$$
$$+ \cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^{\ 2}$$

係数 a_{jk} は対称 $a_{jk}=a_{kj}$ にとれる。(もし a_{jk} が対称でないなら、$(a_{jk}+a_{kj})/2$ をあらためて a_{jk} とおけばよい。)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

なるX、対称行列Aを使って

$Q = X^{\mathrm{T}}AX$ と書ける。

ここで、行列の対角化の際に導入した行列 Vを使って、変換 X=VYを行う。

$Q = X^{\mathrm{T}}AX$ に代入して、 $Q = Y^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}AVY = Y^{\mathrm{T}}\Lambda Y$ Λは $\Lambda = V^{\mathrm{T}}AV$ なる対角行列

$$\Lambda == \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

従って、$Y^{\mathrm{T}} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ として

$$\boxed{Q = \lambda_1 y_1^{\ 2} + \lambda_2 y_2^{\ 2} + \cdots + \lambda_n y_n^{\ 2}}$$

y_1y_2, y_2y_3, y_1y_4 などの交差項を含まない2次形式を標準形という。

二次形式、$Q = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k$ は変換 X=VY (Vは直交行列)によって標準形にできる。

例題

$Q = 2x_1^{\,2} - 2x_1x_2 + 2x_2^{\,2}$ を標準形にせよ。

問題

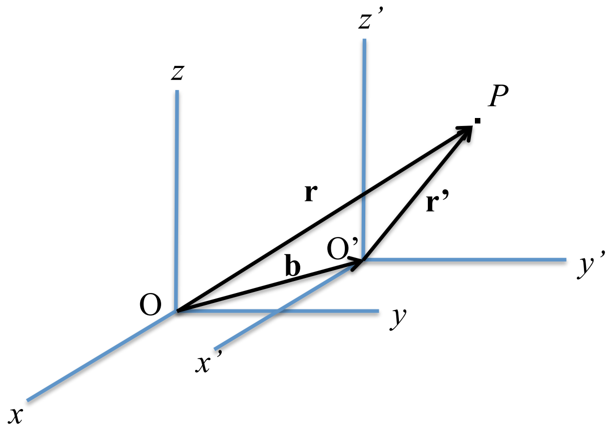
(1) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求めよ。

(2) 対称行列 A を対角化せよ。

(3) 2次形式 $Q = x_1^{\,2} + 5x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$ を標準形になおせ。

5. 座標変換とベクトル

座標軸の平行移動



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

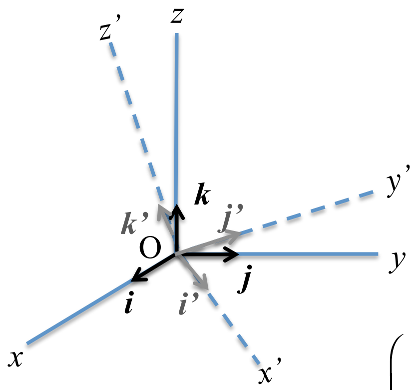
$\boxed{}$

座標軸の平行移動を表す座標変換式

座標軸の平行移動によってはベクトルの成分は変わらない。

（位置ベクトルのような束縛ベクトルは含まない）

座標軸の回転



$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$は基底ベクトルを構成（直行単位ベクトル）

$$\boldsymbol{i}' = a_{11}\boldsymbol{i} + a_{12}\boldsymbol{j} + a_{13}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{j}' = a_{21}\boldsymbol{i} + a_{22}\boldsymbol{j} + a_{23}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{k}' = a_{31}\boldsymbol{i} + a_{32}\boldsymbol{j} + a_{33}\boldsymbol{k}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}' \\ \boldsymbol{j}' \\ \boldsymbol{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

９つの係数a_{jk}はすべてが独立というわけではない。

$$\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{i}' = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{11}{}^2 + a_{12}{}^2 + a_{13}{}^2 = 1$$

$$\boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{j}' = \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{k}' = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{21}{}^2 + a_{22}{}^2 + a_{23}{}^2 = a_{31}{}^2 + a_{32}{}^2 + a_{33}{}^2 = 1$$

$\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{j}'=0 \Rightarrow a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0$

$\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{i}'=0 \Rightarrow a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}+a_{33}a_{13}=0$

以上をまとめると

a_{jk}の幾何学的意味

$a_{11}=\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{i} \Rightarrow \boldsymbol{i}',\boldsymbol{i}$ は単位ベクトルゆえ

x軸とx'軸の間の角度をα_1とおけば、
$a_{11}=\cos\alpha_1$

$x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,\ x_1'=x',\ x_2'=y',\ x_3'=z'$ とするなら

a_{jk} は x 軸と x' 軸との間の角のコサイン

$$\sum_{k=1}^{3}a_{jk}a_{lk}=\delta_{jl} \Rightarrow AA^{\mathrm{T}}=I \quad \text{または} \quad A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$$

したがって、行列Aは直交行列

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}'\\\boldsymbol{j}'\\\boldsymbol{k}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}$$

に左から行列 A^{T}をかけると、 $A^{\mathrm{T}}A=I$ であるから

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}=A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}'\\\boldsymbol{j}'\\\boldsymbol{k}'\end{pmatrix}$$

または

$$\boldsymbol{i}=a_{11}\boldsymbol{i}'+a_{21}\boldsymbol{j}'+a_{31}\boldsymbol{k}'$$
$$\boldsymbol{j}=a_{12}\boldsymbol{i}'+a_{22}\boldsymbol{j}'+a_{32}\boldsymbol{k}'$$
$$\boldsymbol{k}=a_{13}\boldsymbol{i}'+a_{23}\boldsymbol{j}'+a_{33}\boldsymbol{k}'$$

点PのO-xyzとO-$x'y'z'$に関する座標をそれぞれ(x,y,z)および(x',y',z')とする

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$
$$= x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$$

$$\boldsymbol{i} = a_{11}\boldsymbol{i}' + a_{21}\boldsymbol{j}' + a_{31}\boldsymbol{k}'$$
$$\boldsymbol{j} = a_{12}\boldsymbol{i}' + a_{22}\boldsymbol{j}' + a_{32}\boldsymbol{k}'$$ を代入して
$$\boldsymbol{k} = a_{13}\boldsymbol{i}' + a_{23}\boldsymbol{j}' + a_{33}\boldsymbol{k}'$$

$$\boldsymbol{r} = x\left(a_{11}\boldsymbol{i}' + a_{21}\boldsymbol{j}' + a_{31}\boldsymbol{k}'\right) + y\left(a_{12}\boldsymbol{i}' + a_{22}\boldsymbol{j}' + a_{32}\boldsymbol{k}'\right) + z\left(a_{13}\boldsymbol{i}' + a_{23}\boldsymbol{j}' + a_{33}\boldsymbol{k}'\right)$$
$$= x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$$

ベクトル $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ の係数をそれぞれ等しいとおくと

または

座標軸の回転を
表す座標変換式

<u>ベクトルの変換則</u>

ベクトルVのO-xyzでの成分を(V_x, V_y, V_z)、O-$x'y'z'$での成分を(V_x', V_y', V_z') とする。

$$\boldsymbol{V} = V_x\boldsymbol{i} + V_y\boldsymbol{j} + V_z\boldsymbol{k}$$
$$= V_x'\boldsymbol{i}' + V_y'\boldsymbol{j}' + V_z'\boldsymbol{k}'$$

に

$$\boldsymbol{i} = a_{11}\boldsymbol{i}' + a_{21}\boldsymbol{j}' + a_{31}\boldsymbol{k}'$$
$$\boldsymbol{j} = a_{12}\boldsymbol{i}' + a_{22}\boldsymbol{j}' + a_{32}\boldsymbol{k}'$$ を代入して
$$\boldsymbol{k} = a_{13}\boldsymbol{i}' + a_{23}\boldsymbol{j}' + a_{33}\boldsymbol{k}'$$

$\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ の係数をそれぞれ等しいとおくと

または

座標軸の回転に関しての
ベクトルの変換