一般の座標変換

二つの直交座標系O-xyz、O-$x'y'z'$があるとき、一方の座標から他方の座標への変換は座標軸の回転と平行移動を組み合わせて得られる。

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z - b_1$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z - b_2$$
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z - b_3$$

どちらを先にやっても結果は変わらない。

一般の座標変換によってベクトルの成分は

$$V_x' = a_{11}V_x + a_{12}V_y + a_{13}V_z$$
$$V_y' = a_{21}V_x + a_{22}V_y + a_{23}V_z$$
$$V_z' = a_{31}V_x + a_{32}V_y + a_{33}V_z$$

のように変換する。(平行移動によってベクトルの成分は変わらない。)

ある量 $\boldsymbol{V}$ が1つの座標系に関して3つの成分(V_x, V_y, V_z)で表され、その成分が上記座標変換に際して上のように変換されるとき、この量をベクトルと呼ぶ。
上記座標変換で変わらない量をスカラーと呼ぶ。

問題

座標軸の平行移動によってベクトル $\boldsymbol{V}$ の成分は変わらないことを示せ。

解答

ベクトル $\boldsymbol{V}$ の始点と終点をそれぞれPとQとする。点PのO-xyzとO-$x'y'z'$に関する座標をそれぞれ (P_1, P_2, P_3)と(P_1', P_2', P_3')とし、点QのO-xyzとO-$x'y'z'$に関する座標をそれぞれ (Q_1, Q_2, Q_3)と(Q_1', Q_2', Q_3')とする。このときベクトル$\boldsymbol{V}$ のO-xyzとO-$x'y'z'$に関する成分をそれぞれ(V_1, V_2, V_3)と(V_1', V_2', V_3')とすれば、

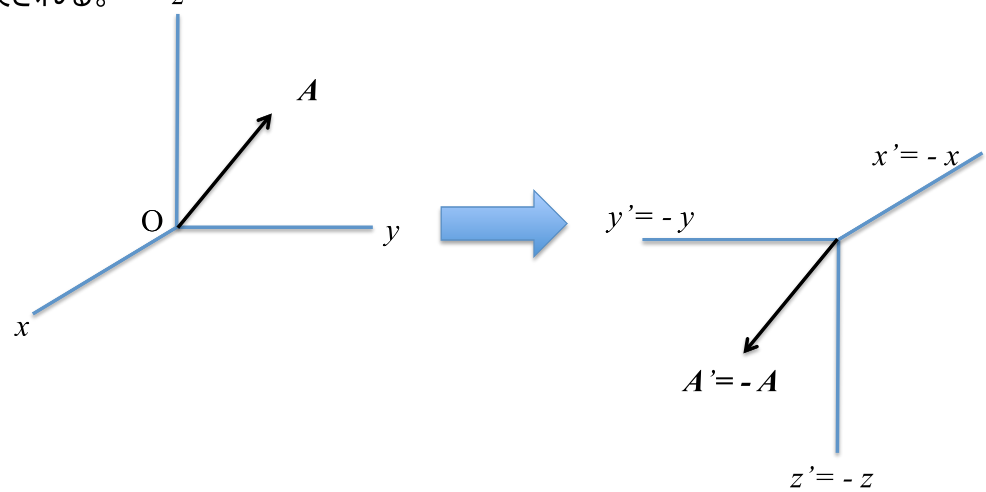
鏡像

座標変換 $x' = -x,\quad y' = -y,\quad z' = -z$ を鏡像という。（右手系を左手系に移す）

鏡像によってベクトル$\boldsymbol{A}$の成分は、$A_x' = -A_x \quad A_y' = -A_y \quad A_z' = -A_z$

と変換される。

極性のベクトル



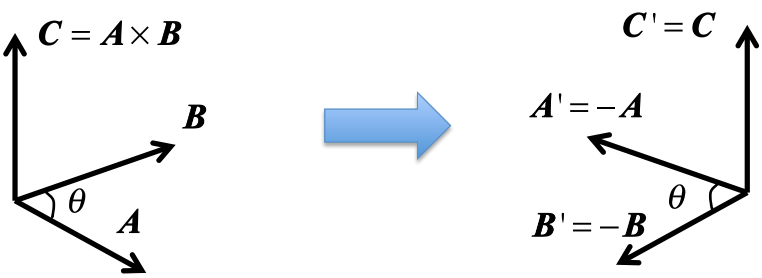
2つのベクトルのベクトル積 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ は

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y,\quad C_y = A_z B_x - A_x B_z,\quad C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

であるから、鏡像によって変わらない。

$$C_x' = C_x,\quad C_y' = C_y,\quad C_z' = C_z$$

これは軸性のベクトル



力、速度、加速度. . . 極性ベクトル

角速度ベクトル、力のモーメント. . . 軸性ベクトル

問題

２点 $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ と $\left(x_2, y_2, z_2\right)$ の間の距離

$$r_{12} = \left[\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2\right]^{1/2}$$

は一般の座標変換

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z - b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z - b_2 \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z - b_3 \end{aligned}$$

によって変わらない。すなわち２点間の距離はスカラーであることを示せ。

解答

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z - b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z - b_2 \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z - b_3 \end{aligned}$$

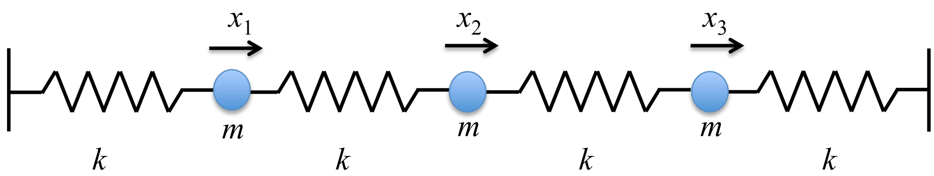
から

$$\begin{aligned}
&\left(x_2' - x_1'\right)^2 + \left(y_2' - y_1'\right)^2 + \left(z_2' - z_1'\right)^2 \\
&= \left[\left(a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}z_2 - b_1\right) - \left(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 - b_1\right)\right]^2 \\
&+ \left[\left(a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23}z_2 - b_2\right) - \left(a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 - b_2\right)\right]^2 \\
&+ \left[\left(a_{31}x_2 + a_{32}y_2 + a_{33}z_2 - b_3\right) - \left(a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 - b_3\right)\right]^2 \\
&= \left(a_{11}{}^2 + a_{21}{}^2 + a_{31}{}^2\right)\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(a_{12}{}^2 + a_{22}{}^2 + a_{32}{}^2\right)\left(y_2 - y_1\right)^2 \\
&+ \left(a_{13}{}^2 + a_{23}{}^2 + a_{33}{}^2\right)\left(z_2 - z_1\right)^2 + 2\left(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}\right)\left(x_2 - x_1\right)\left(y_2 - y_1\right) \\
&+ 2\left(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}\right)\left(y_2 - y_1\right)\left(z_2 - z_1\right) + 2\left(a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31}\right)\left(z_2 - z_1\right)\left(x_2 - x_1\right)
\end{aligned}$$

問題

ベクトルのスカラー積 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_x v_x+u_y v_y+u_z v_z$ はスカラーであることを示せ。

バネで結ばれた3つの質点の運動



$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) &&= -k(2x_1 - x_2)\\
m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) &&= -k(2x_2 - x_1 - x_3)\\
m\ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_2) - kx_3 &&= -k(2x_3 - x_2)
\end{aligned}
$$

$\omega_0=\sqrt{k/m}$ として

$\ddot{X}=-\omega_0{}^2 AX,\qquad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ と書ける。（Aは対称行列）

ある直交行列を V として　$X=VQ$　または $Q=V^{\mathrm{T}}X$ で定義される
新しい座標Qを考える。

$X=VQ$　を　$\ddot{X}=-\omega_0{}^2AX$ に代入して　$V\ddot{Q}=-\omega_0{}^2AVQ$

V は直交行列であるから $V^{\mathrm{T}}V=VV^{\mathrm{T}}=I$

したがって、 $\ddot{Q}=-\omega_0{}^2V^{\mathrm{T}}AVQ$

A は対称行列であるので、固有ベクトルから作った直交行列 V によって、
$V^{\mathrm{T}}AV$ は対角化される。

対称行列 A を対角化する V を探す。

固有方程式は

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\left\{(2-\lambda)^2-2\right\}=0$$

行列Aの固有値は　$\lambda_1=2-\sqrt{2}$,　$\lambda_2=2$,　$\lambda_3=2+\sqrt{2}$

対応する固有ベクトルは

$$Au=\lambda u,\quad u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

すなわち、 $\begin{aligned} 2u_1-u_2&=\lambda u_1 \\ -u_1+2u_2-u_3&=\lambda u_2 \\ -u_2+2u_3&=\lambda u_3 \end{aligned}$　$\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ に対応する固有ベクトルは、それぞれ

$$v_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},\quad v_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix},\quad v_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

3つの固有ベクトルから直交行列 V を作る。

$$V = V^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$V^{\mathrm{T}} A V =$$

標準座標 $Q = V^{\mathrm{T}} X$ の従う方程式は

$$\ddot{Q} = -\omega_0{}^2 V^{\mathrm{T}} A V Q = -\begin{pmatrix} \omega_1{}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3{}^2 \end{pmatrix} Q$$

$$\omega_1{}^2 = \left(2 - \sqrt{2}\right)\omega_0{}^2,\quad \omega_2{}^2 = 2\omega_0{}^2,\quad \omega_3{}^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right)\omega_0{}^2$$

であるから、$Q^{\mathrm{T}} = \left(q_1, q_2, q_3\right)$ として

$$q_1 = a\cos\left(\omega_1 t + \alpha\right),\quad q_2 = b\cos\left(\omega_2 t + \beta\right),\quad q_3 = c\cos\left(\omega_3 t + \gamma\right)$$

したがって、$X = VQ$ より、運動方程式の一般解は

$$x_1 = \frac{1}{2}a\cos\left(\omega_1 t + \alpha\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}b\cos\left(\omega_2 t + \beta\right) + \frac{1}{2}c\cos\left(\omega_3 t + \gamma\right)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a\cos\left(\omega_1 t + \alpha\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}c\cos\left(\omega_3 t + \gamma\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}a\cos\left(\omega_1 t + \alpha\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}b\cos\left(\omega_2 t + \beta\right) + \frac{1}{2}c\cos\left(\omega_3 t + \gamma\right)$$

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$
は任意定数